



ÜÇ BOYUTLU KÜTLEÇEKİMİ KURAMLARINDA DÖNEN KARA DELİKLER VE ÇİFT KOPYA

PROJE SONUÇ RAPORU

Program Kodu: 1002-A

Proje No: 122F291

Proje Yürütücüsü: Arş. Gör. Dr. Mustafa Tek

Bursiyerler:

Mehmet Kemal Gümüş

Projeden desteklenmeyen diğer araştırmacılar:

Dr. Öğr. Ü. Gökhan Alkaç: Ankara Bilim Üniversitesi öğretim üyesi

Dr. Öğr. Ü. Mehmet Ali Olpak: Türk Hava Kurumu öğretim üyesi

EYLÜL 2023
İSTANBUL



ÖNSÖZ

Klasik çift kopya, genel görelilik kuramının belli tipteki çözümleri ile Maxwell teorisinin çözümlerini eşleştirmesini sağlayan ve son yıllarda literatürde büyük ilgi toplayan bir dualitedir. Üç uzay-zaman boyutundaki ($D = 3$) çalışmalar genel görelilik kuramı bu boyutta serbestlik derecesi taşımadığı ve düzgün tanımlı bir Newtonyen limite sahip olmadığı için dualitenin ne kadar genel olduğunun araştırılmasında özel bir yere sahiptir. Proje daha önce statik kara delikler için elde edilen sonuçların dönen kara deliklere genellenmesini amaçlamıştır. Genel bir statik uzay-zaman metriği için uygulanması gereken prosedür anlaşılmış, bu prosedür daha önce çalışılmış olan statik kara delik örneklerine başarı ile uygulanmıştır.

Bu proje sonucunda uluslararası saygın bir dergide yayın yapılması amaçlanmaktadır.

Arş. Gör. Dr.
Mustafa TEK
İstanbul, Ekim 2023



İçindekiler

ÖNSÖZ	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	2
3. GEREÇ VE YÖNTEM	6
4. BULGULAR	9
4.1 Maxwell alanları ile etkileşim	10
4.2 Born - Infeld tipi etkileşim	11
4.3 Kütleli skaler alan etkileşimi	12
4.4 Minimal olmayan skaler alan etkileşimi kaynaklı regüler kara delik	12
5 SONUÇ	14

Şekiller

Tablolar



ÖZET

Bu projede $D = 3$ 'te statik kara delik çözümlerinden dönen kara delik çözümü elde etme mekanizması olarak iteleme dönüşümleri çeşitli örneklerle uygulanmıştır. Çözümler Kerr-Schild çift kopya kapsamında incelenerek Maxwell teorisindeki karşılıkları (tek kopyalar) elde edilmiştir. Ulaşılan en önemli sonuç şudur: İteleme dönüşümleri ile elde edilen dönen kara delik çözümlerinin tek kopyalarının elde edilebilmesi için literatürdeki standart formülasyon yerine daha önce proje ekibinin bazı üyeleri tarafından elde edilen genel formülasyon kullanılmalıdır.

Anahtar kelimeler: Klasik çift kopya, Dönen kara delikler, Genel görelilik



ABSTRACT

In this project, the boost transformation, which is one of the methods to obtain rotating black hole solutions from static ones in $D = 3$, was applied to various examples. These solutions were studied in the context of the Kerr-Schild double copy and the corresponding solutions of Maxwell's theory (single copies) were obtained. Our most important finding is as follows: In order to obtain the single copies of the rotating black hole solutions that arise from the boost transformation, instead of the standart formulation in the literature, the most general formulation obtained by some of the project team members must be employed.

Keywords: Classical double copy, Rotating black holes, General relativity



1. GİRİŞ

Projede cevaplanmak istenen soru oldukça basittir. Kerr-Schild çift kopyanın uygulanabilmesi için genel görelilik teorisinin çözümleri Kerr-Schild kordinatlarında yazılabilmelidir. $D \geq 4$ iken statik, küresel simetrik vakum çözümü olan Schwarzschild kara deliği bu kordinatlarda yazıldığında, Minkowski arka plan metriği sferoid (spheroidal) kordinatlarda alınır, kuramın vakumdaki dönen kara delik çözümü olan Kerr kara deliği elde edilebilir. Maxwell teorisindeki tek kopya da bu değişim takip edilerek kolayca bulunabilir. Ancak ilerde tartışılacağı üzere anlamlı çözümler elde edilebilmesi için $D = 3$ 'te madde etkileşimi tanımlanması zorunludur. Bu durumda ise tutarlı bir şekilde dönen kara delik çözümlerinin elde edilmesi için statik çözüme iteleme dönüşümleri (boost transformations) uygulanmalıdır. Projede iteleme dönüşümleri ile elde edilen çözümlerin tek kopyalarının nasıl elde edileceğinin anlaşılması amaçlanmıştır.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Kerr-Schild çift kopyanın standart formülasyonunda (Monteiro vd., 2014) durağan (*stationary*) bir metrik ($\partial_0 g_{\mu\nu}$) ele alındığında bu metrik KS formunda

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1)$$

şeklinde yazılabilirler. Burada $\eta_{\mu\nu}$ Minkowski artalan metriği ve $h_{\mu\nu}$ bu artalandan sapmayı (*deviation*) temsil eder. Metriğin KS formda olabilmesi için sapma $h_{\mu\nu}$ 'nün ϕ skaler alanı ve k_μ vektörü cinsinden

$$h_{\mu\nu} = \phi k_\mu k_\nu \quad (2)$$

şeklinde yazılabilmesi gereklidir. Buradaki önemli nokta k_μ vektörünün hem artalan metriği $\eta_{\mu\nu}$ hem de tam metrik $g_{\mu\nu}$ için sıfır normlu ve jeodezik olmasıdır. Metrik (1) formunda yazıldığında karışık indisli Ricci tensörü $R^\mu{}_\nu$ sapma $h_{\mu\nu}$ cinsinden lineer olarak yazılabilir ve bu durumda $D = 3$ 'te iz üzerinden çevrilmiş Einstein denklemleri

$$\begin{aligned} R^\mu{}_\nu &= \frac{1}{2} (\bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}^\mu h_{\alpha\nu} + \bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_\nu h^\mu{}_\alpha - \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha h^\mu{}_\nu) \\ &= \frac{1}{2} (T^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu T) \end{aligned} \quad (3)$$

formunu alır. Burada $\bar{\nabla}$ artalan metriğine göre kovaryant türevleri temsil etmektedir. $k^0 = -1$ seçildiğinde iz üzerinden çevrilmiş Einstein denklemlerinin $\mu 0$ bileşeni şu şekilde yazılabilir:

$$\bar{\nabla}_\nu (\bar{\nabla}^\mu (\phi k^\nu) - \bar{\nabla}^\nu (\phi k^\mu)) = -(T^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu T) \quad (4)$$

Eğer

$$A_\mu \equiv \phi k_\mu \quad (5)$$

tanımı yapılırsa (4) denklemi

$$\bar{\nabla}_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu \quad (6)$$

haline dönüştürülebilir. Burada $F^{\mu\nu}$ Abelyen ayar alanları için alan - güç tensörü olup

$$F_{\mu\nu} \equiv 2\bar{\nabla}_{[\mu} A_{\nu]} \quad (7)$$



şeklinde tanımlanır. (6) denklemi iyi bilindiği üzere Maxwell denklemidir ve J^μ kaynak terimi

$$J^\mu \equiv -2(T^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu T) \quad (8)$$

şeklini alır. Yine (6) denkleminin zamansal bileşeni de

$$-\bar{\nabla}^2 \phi = J^0 \quad (9)$$

verecektir. Bu da bilindiği üzere Poisson denklemidir. Böylece durağan bir $g_{\mu\nu}$ metriği için tek (*single*) ve sıfıncı (*zeroth*) kopya denklemleri ve kaynak terimleri elde edilebilmiş olur.

Bu formülasyon statik bir karadelik çözümü için uygulanabilir. $D = 3$ 'te genel bir statik uzay-zaman için çizgi elemanı

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -h(r) dt^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + r^2 d\theta^2 \quad (10)$$

şeklinde yazıldığında ve bu metrikte

$$dt \rightarrow dt - \frac{1-h}{h} dr \quad (11)$$

dönüşümü yapıldığında, (10)'daki çizgi elemanı

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi(k_\mu dx^\mu)^2 \quad (12)$$

halini alır. Burada $\eta_{\mu\nu}$ küresel Minkowski metriğidir ve (11)'deki KS dönüşüm yapıldığında $\phi(r)$ ve k_μ sırasıyla

$$\phi(r) = 1 - h(r), \quad k_\mu dx^\mu = dt + dr \quad (13)$$

olarak elde edilirler. Genel bir $h(r)$ metrik fonksiyonu için karışık indisli Ricci tensörünün $\mu 0$ bileşeni

$$R^\mu{}_{0} = \left(\frac{r h''(r) + h'(r)}{2r}, 0, 0 \right) \quad (14)$$

halini alır. Metrik fonksiyonu için

$$h(r) = 1 - 2M \log(r) \quad (15)$$

seçimi yapılarak yukarıda özetlenen formülasyonun sonuçları bulunabilir (Carrillo González vd.,



2019). Bu metrik fonksiyonu için Ricci tensörü

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2M \end{pmatrix} \quad (16)$$

olarak bulunur.

Görüleceği üzere $h(r)$ 'nin bu seçimi için Ricci tensörü sıfırdan farklıdır. Zira Einstein teorisinde üç boyutlu uzay zamanlarda vakum çözümü olmadığı için bu beklenen bir sonuçtur. Bir başka deyişle üç boyutlu uzay zamanlarda kütleçekim yayılamayacağından (*propagate*) kütleçekim ancak uzayzamanın bir maddeyle etkileşimi üzerinden elde edilir.

Yukarıda (15)'da verilen metrik fonksiyonu için KS çift kopya tartışmasına tekrar dönülürse $A_\mu = \phi k_\mu$ ayar alan tanımı yapıldığında karışık indisli Ricci tensörünün $\mu 0$ bileşeninden yararlanarak Maxwell denklemi

$$\bar{\nabla}_\nu F^{\nu\mu} = 0 \quad (17)$$

olarak bulunur. Buradaki incelikli olan nokta bu denklem bir vakum çözümü değil de bir noktasal yük çözümüne sahip olmasıdır. (17)'in zamansal bileşeninden sıfıncı kopya denklemleri yazıldığında

$$\bar{\nabla}^2 \phi = 0 \quad (18)$$

bulunur. Bu da iyi bilindiği üzere Laplace denklemdir ve noktasal yük çözümlerine sahiptir.

Bu tip bir metrik fonksiyonunun elde edilmesinin (Carrillo González vd., 2019) 'de serbest, kütle-siz ve hayalet (ghost) bir skaler alanla etkileşim tanımlanarak elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu kaynağı uzaysal bir mükemmel akışkan (spacelike perfect fluid) olarak da görmek de mümkündür. (Gumus & Alkac, 2020)'de bu karadelik çözümünün KS kordinatları kullanılarak elde edilen dönen versiyonunun serbest bir skaler tarafından desteklenmediği ve uzaysal mükemmel akışkan kaynağının zorunlu olduğu gösterilmiştir. Daha sonra diferansiyel formların dualitesi kullanılarak aynı kaynağın hayalet bir ayar alanı ile değiştirilebileceği, bu sayede 3 boyutlu kütle-çekimi kuramlarının anlaşılmasında özel bir yeri olan Banados-Teitelboim-Zanelli kara deliğinin elektrik yüklü haliyle nasıl ilişki kurulabileceği gösterilmiştir (Alkac vd., 2021a). Ayrıca serbest skaler ve ayar alanının genellenmeleriyle oluşturulan madde etkileşimlerinin genellenmiş halleri detaylı olarak incelenmiştir (Alkac vd., 2022). Bulgular bölümünde tüm bu örnekler tartışılacaktır.

KS kordinatlarındaki bir metriğin doğal olarak döndürülmesine izin veren mekanizma bilinen



madde etkileşimlerine izin vermediğinden dönen kara delik çözümlerinin elde edilmesini sağlayan başka yöntemlerin incelenmesi gerekli hale gelmiştir. Giriş bölümünde de bahsedildiği gibi bu projede iteleme mekanizmasına yoğunlaşmıştır.



3. GEREÇ VE YÖNTEM

Yukarıdaki formülasyon artalan metriğinin küresel veya sferoidal koordinatlarda yazılmış Minkowski uzayzamanı olduğu durumlarda rahatlıkla çalışmaktadır. Ancak Minkowski uzayzamanının daha genel bir koordinat setinde yazıldığı durumda geçerli değildir.

Bunu görmenin yollarından birisi statik karadelik çözümü veren metriklerden dönen karadelik çözümü elde etmek için kullanılan iteleme (*boost*) dönüşümünü kullanmaktır. Bunun için (12)'deki metrikte

$$t \rightarrow \Xi t - a\theta \quad \text{ve} \quad \theta \rightarrow \frac{at}{\ell^2} - \Xi\theta \quad (19)$$

dönüşümü yapılır (Lemos, 1995; Lemos & Zanchin, 1996). Burada a ve $\Xi^2 \equiv 1 + \frac{a^2}{\ell^2}$ birer sabit olup karadelğin açısal momentumu ile ilişkilendirilebilir niceliklerdir. Bu durumda (12)'deki KS formu bozulmaz. Ancak artalan metriği olan Minkowski uzayzamanı yeni koordinatlarda şu formda olacaktır:

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(\Xi dt - a d\theta)^2 + dr^2 + \frac{r^2}{\ell^4} (adt - \Xi \ell^2 d\theta)^2. \quad (20)$$

Bu metriğin Riemann tensörü hâlen sıfırdır ($\bar{R}_{\mu\nu\sigma\rho} = 0$). (19) dönüşümünden sonra KS skaleri ve sıfır normlu jeodezik ise şöyle elde edilir:

$$\phi(r) = (1 - h(r)) \quad \text{ve} \quad k_\mu dx^\mu = \Xi dt + dr - a d\theta. \quad (21)$$

Tartışmanın bu noktasında $h_{\mu\nu} = \phi k_\mu k_\nu$ olduğu hatırlanırsa herhangi bir ξ skaleri için

$$\phi \rightarrow \xi^2 \phi \quad \text{ve} \quad k_\mu \rightarrow \frac{1}{\xi} k_\mu \quad (22)$$

ölçeklemesi yapıldığında $h_{\mu\nu}$ 'nin değişmeyeceği açıktır. Öyleyse $\xi = \Xi$ olduğu durumda (21)'deki ifadeler

$$\phi(r) = \Xi^2 (1 - h(r)) \quad \text{ve} \quad k_\mu dx^\mu = dt + \frac{dr}{\Xi} - \frac{a d\theta}{\Xi}. \quad (23)$$

şeklinde dönüşür. Bu ölçeklemeyi yapmaktaki maksat bir önceki bölümdeki tartışma ile k_0 bileşenleri üzerinden paralelliğin sağlanmasıdır.

Bu durumda tam metriğin karışık indisli Ricci tensörü hesaplandığında μ_0 bileşeni şöyle bulunur:

$$R^\mu{}_\mu = \left(\frac{\ell^2 r h''(r) + (-2a^2 + \ell^2 \Xi^2) h'(r)}{2\ell^2 r}, 0, \frac{a\Xi (r h''(r) - h'(r))}{2\ell^2 r} \right) \quad (24)$$



Buna mukabil hem art alan hem de tam metriğe göre $A_\mu = \phi k_\mu$ için bulunacak Maxwell denklemi

$$\bar{\nabla}_\nu F^{\nu\mu} = \left\{ \frac{\Xi^2 (rh''(r) + h'(r))}{r}, 0, \frac{a\Xi (rh''(r) + h'(r))}{\ell^2 r} \right\} \quad (25)$$

sonucunu verir. Görüleceği üzere (20) artalanı için Maxwell denklemi ve tam metriğin karışık indisli Ricci tensörünün $\mu 0$ bileşeni eşit olmamaktadır.

(24) ve (25)'daki sonuçların uyumsuzluğunun çözülebilmesi için (Alkac vd., 2021b)'te derlediği gibi genel bir $\bar{g}_{\mu\nu}$ metriği için genelleştirilen KS çift kopya formülasyonuna başvurulmalıdır. Alkac vd.'ne göre karışık indisli Ricci tensörü

$$R^\mu{}_\nu = \bar{R}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} [\bar{\nabla}_\alpha F^{\alpha\mu} k_\nu + E^\mu{}_\nu] \quad (26)$$

olarak ifade edilir. Burada $\bar{}$ gösterimi yine "artalan metriğine göre" anlamına gelmektedir. (26)'de yer alan $E^\mu{}_\nu$ tensörü

$$X^\mu{}_\nu = -\bar{\nabla}_\nu \left[A^\mu \left(\bar{\nabla}_\alpha k^\alpha + \frac{k^\alpha \bar{\nabla}_\alpha \phi}{\phi} \right) \right], \quad (27)$$

$$Y^\mu{}_\nu = F^{\alpha\mu} \bar{\nabla}_\alpha k_\nu - \bar{\nabla}_\alpha (A^\alpha \bar{\nabla}^\mu k_\nu - A^\mu \bar{\nabla}^\alpha k_\nu). \quad (28)$$

olmak üzere

$$E^\mu{}_\nu = X^\mu{}_\nu + Y^\mu{}_\nu - \bar{R}^\mu{}_{\alpha\beta\nu} A^\alpha k^\beta + \bar{R}_{\alpha\nu} A^\alpha k^\mu, \quad (29)$$

şeklinde tanımlanır. (26) kullanılarak iz üzerinden çevrilmiş Einstein denklemleri

$$\Delta^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} [\bar{\nabla}_\alpha F^{\alpha\mu} k_\nu + E^\mu{}_\nu] = \tilde{T}^\mu{}_\nu \quad (30)$$

Burada $\Delta^\mu{}_\nu$ ve $\tilde{T}^\mu{}_\nu$ sırasıyla

$$\Delta^\mu{}_\nu = \bar{R}^\mu{}_\nu - 2\Lambda \delta^\mu{}_\nu, \quad (31)$$

ve

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu = T^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu T. \quad (32)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Sabit eğrilikli metrikler için $\Delta^\mu{}_\nu$ uygun bir kozmolojik sabit seçimiyle sıfıra eşit olur ¹.

Bu formülasyonda iz üzerinden çevrilmiş Einstein denklemlerinden Maxwell denkleminin elde edilebilmesi için (30) denkleminin hem artalan metriğine hem de tam metriğe göre Killing vektör

¹Bununla ilgili daha ayrıntılı bir tartışma için Alkac vd. (2021b)'nin ek bölümüne bakılabilir.



olan V^μ vektörü ile kontraksiyonuna bakmak gerekir. Bu durumda

$$E^\mu = \frac{1}{V \cdot k} E^\mu_\nu V^\nu \quad \Delta^\mu = \frac{1}{V \cdot k} \Delta^\mu_\nu V^\nu, \quad \tilde{T}^\mu = \frac{1}{V \cdot k} \tilde{T}^\mu_\nu V^\nu \quad (33)$$

ve

$$J^\mu = 2 \left[\Delta^\mu - \tilde{T}^\mu \right] \quad (34)$$

tanımları yapılırsa (30) denklemi

$$\bar{\nabla}_\nu F^{\nu\mu} + E^\mu = J^\mu \quad (35)$$

halini alır. Bu aşamada belirtmek gerekir ki KS çift kopyanın bu formülasyonunda (33)'teki E^μ bilinen tüm durağan metrik örnekleri için her halükârda sifıra eşit olmaktadır. Ancak notasyondaki tutarlılığı korumak için eşitliklerde tutulmaya devam edilecektir.

(35) denklemi bir kez daha V^μ ile kontraksiyonu sıfıncı kopya denklemlerini verir:

$$\bar{\nabla}^2 \phi + \mathcal{Z} + \mathcal{E} = j. \quad (36)$$

Bu denklemde $\mathcal{Z}$, $\mathcal{E}$ ve j nicelikleri

$$Z^\mu = \bar{\nabla}_\alpha k^\mu \bar{\nabla}^\alpha \phi + \bar{\nabla}_\alpha \left[2\phi \bar{\nabla}^{[\alpha} k^{\mu]} - k^\alpha \bar{\nabla}^\mu \phi \right]. \quad (37)$$

olmak üzere sırasıyla

$$\mathcal{Z} = \frac{V \cdot Z}{V \cdot k}, \quad \mathcal{E} = \frac{V \cdot E}{V \cdot k}, \quad j = \frac{V \cdot J}{V \cdot k}, \quad (38)$$

olarak tanımlanmışlardır.

Burada kısaca özetlenen bu formülasyon statik metrikler için kullanıldığında Killing vektör $V^\mu = \delta^\mu_0$ olacağı için karışık indisli Ricci tensörünün $\mu 0$ bileşeni ile (30) denkleminin Killing vektör ile kontraksiyonu aynı sonuçları verecektir. Ancak Killing vektörünün δ^μ_0 'dan farklı olduğu artalan metrikleri için karışık indisli Ricci tensörünün $\mu 0$ bileşenine bakmak doğru Maxwell denklemini ve dolayısıyla doğru kaynak terimini vermeyecektir.



4. BULGULAR

Önceki bölümde özetlenen iteleme yönteminin KS çift kopya kapsamında incelenmesi ile elde edilen bulgular şu şekilde özetlenebilir:

1. (19) denklemindeki iteleme dönüşüm tam metriğin KS forma dönüştürülmeden önceki Boyer - Lindquist koordinatlarındaki haline uygulandıktan sonra KS forma dönüştürülebileceği gibi önce KS forma dönüştürüldükten sonra da iteleme transformasyonuna tabii tutulabilir. İlk durum için geçerli olan KS dönüşümleri ise

$$dt \rightarrow dt - \Xi \frac{1 - h(r)}{h(r)} dr \quad \text{ve} \quad d\theta \rightarrow d\theta - \frac{a}{\ell^2} \frac{1 - h(r)}{h(r)} dr \quad (39)$$

formunda olacaktır. Bu durumda tam metrik

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi(r) k_\mu k_\nu ; \quad (40)$$

şeklinde yazılırken itelenmiş Minkowski metriği

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(\Xi dt - a d\theta)^2 + dr^2 + \frac{r^2}{\ell^4} (adt - \Xi \ell^2 d\theta)^2 , \quad (41)$$

olur.

2. (19) dönüşümleri statik metrik için $V^\mu = \delta_0^\mu$ formundaki Killing vektörü

$$V^\mu = \left(\Xi, 0, \frac{a}{\ell^2} \right) \quad (42)$$

olarak dönüştürür.

3. (40)'deki metriğe

$$\phi(r) = \Xi^2 (1 - h(r)) = \Xi^2 (2M + \Lambda r^2 - 2q^2 \log(r)) \quad (43)$$

yerleştirilirse $A_\mu = \phi k_\mu$ için Maxwell denklemi için gelecek kaynak terimi şöyle olacaktır

$$J^\mu = \left(4\Xi^2 \Lambda, 0, 4\Xi \frac{a}{\ell^2} \Lambda \right) \quad (44)$$



(42)'den de görüleceği üzere

$$J^\mu = 4\Xi\Lambda V^\mu \quad (45)$$

ilişkinine ulaşılabilir. Poisson denkleminde (43) için bulunacak yük

$$j = J^0 = 4\Xi^2\Lambda \quad (46)$$

formunda olur.

Burada verilen bulgular oldukça genel olup Boyer-Lindsquit (BL) koordinatlarında çizgi elemanı

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{1}{h(r)}dr^2 + r^2d\theta^2, \quad (47)$$

olarak ifade edilebilen metriklere iteleme uygulanmasından sonra KS formda yazılması ile farklı durumlara uygulanabilir. Bundan sonra literatür özeti kısmında bahsi geçen farklı madde etkileşimleri ile elde edilmiş statik kara delik çözümlerine uygulamalar incelenecektir.

4.1 Maxwell alanları ile etkileşim

Kütle çekiminin etkileştiği a_μ Maxwell alanları için alan güç tensörü $f_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}a_{\nu]}$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda maddesel lagranjiyen

$$f_{\mu\nu} = f_{rt} \begin{pmatrix} 0 & \Xi & 0 \\ -\Xi & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad f_{rt} = \frac{q}{r} \quad (48)$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - 2\Lambda, \quad \Lambda = -\frac{1}{\ell^2} \quad (49)$$

şeklinde olacaktır. Metrik fonksiyonu

$$h(r) = 1 + 2M - \Lambda r^2 + 2Gq^2 \log(r), \quad (50)$$

için KS skaleri ve null vektör

$$\phi(r) = \Xi^2(1 - h(r)) \quad \text{and} \quad k_\mu dx^\mu = dt + \frac{dr}{\Xi} - \frac{ad\theta}{\Xi}. \quad (51)$$



olarak ifade edilirse

$A_\mu = \phi k_\mu$ için alan güç tensörü ve kaynak akımı sırasıyla aşağıdaki gibi olacaktır

$$F_{\mu\nu} = \frac{2\Xi (Gq^2 + \Lambda r^2)}{r} \begin{pmatrix} 0 & -\Xi & 0 \\ \Xi & 0 & \frac{a}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{a}{\ell^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$J^\mu = 4\Xi\Lambda \left(\Xi, 0, \frac{a}{\ell^2} \right) = 4\Xi\Lambda V^\mu. \quad (53)$$

4.2 Born - Infeld tipi etkileşim

İkinci örnek olarak ise Born - Infeld tipi vektör alanlarının kütle çekimle etkileşmesi durumuna bakılabilir. Maddesel lagranjiyen

$$\mathcal{L}_{\text{BI}}(f) = \frac{b^2}{2\pi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{f^2}{2b^2}} \right) - 2\Lambda, \quad \Lambda = -\frac{1}{\ell^2}, \quad f_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} a_{\nu]}, \quad (54)$$

$$f^{\mu\nu} = f_{rt} \begin{pmatrix} 0 & \Xi & 0 \\ -\Xi & 0 & \frac{a}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{a}{\ell^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad f_{rt} = \frac{q}{\psi(r)}, \quad \psi(r) = \sqrt{r^2 + \frac{q^2}{b^2}} \quad (55)$$

olmak üzere metrik fonksiyonu

$$h(r) = 1 + 8M - \Lambda r^2 + \frac{q^2}{4\pi} + \frac{b^2}{2\pi} \left[r^2 - r\psi(r) - \frac{q^2}{b^2} \log \left(\frac{r + \psi(r)}{r} \right) \right] \quad (56)$$

için tek kopya sonuçları

$$F^{\mu\nu} = F_{rt} \begin{pmatrix} 0 & -\Xi & 0 \\ \Xi & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad F_{rt} = \Xi \left[\frac{b^2 (r - \psi(r))}{\pi} + \frac{2r}{\ell^2} \right] \quad (57)$$

$$J^\mu = \frac{\Xi}{\pi\ell^2} \left[\frac{b^2\psi(r)}{r} + \frac{b^2r}{\psi(r)} - 2b^2 - \frac{4\pi}{\ell^2} \right] V^\mu, \quad (58)$$

olarak ifade edilebilir.



4.3 Kütlesiz skaler alan etkileşimi

Kütlesiz skaler bir alan için maddesel lagranjiyen

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi - 2\Lambda, \quad \Lambda = -\frac{1}{\ell^2} \quad (59)$$

$$\nabla_\mu\varphi = \chi\left(\frac{a}{\ell^2}, 0, \Xi\right) \quad \text{and} \quad \chi : \text{sabit} \quad (60)$$

olarak ifade edilir. Metrik fonksiyonu

$$h(r) = 1 + 2M - \Lambda r^2 + \chi^2 \log(r) \quad (61)$$

olduğunda, tek kopya sonuçları

$$F_{\mu\nu} = \frac{2\Xi(\chi^2/2 + \Lambda r^2)}{r} \begin{pmatrix} 0 & -\Xi & 0 \\ \Xi & 0 & \frac{a}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{a}{\ell^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$J^\mu = 4\Xi\Lambda\left(\Xi, 0, \frac{a}{\ell^2}\right) = 4\Xi\Lambda V^\mu, \quad (63)$$

gibi bulunur. Burada açıkça görüleceği üzere $\chi^2 = 2Gq^2$ koşulu Maxwell alanları ile etkileşim durumuya aynı sonucu verir. Bu d boyutlu bir uzayzamanda bir n -formun dualinin $(d-n)$ -form olmasının bir sonucudur. $f_{\mu\nu}$ 2-formu için 3 boyutlu bir uzayzamanda dual alan bekleneneği üzere φ gibi bir skaler alan olacaktır.

4.4 Minimal olmayan skaler alan etkileşimi kaynaklı regüler kara delik

Son olarak kütle çekiminin kütlesiz bir skaler alanla minimal olmayan bir etkileşiminden kaynaklanan regüler kara delik çözümü ele alınabilir. Bu durumda maddesel lagranjiyen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & -\sum_{n=1} \alpha_n \ell^{2(n-1)} (\nabla\varphi)^{2n} \\ & + \sum_{m=0} \beta_m \ell^{2(m+1)} (\nabla\varphi)^{2m} [(3+2m)R^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi - R(\nabla\varphi)^2] - 2\Lambda, \quad \Lambda = -\frac{1}{\ell^2}. \end{aligned} \quad (64)$$



olmak üzere skaler şu formu aldığıında

$$\nabla_\mu \varphi = p \left(\frac{a}{\ell^2}, 0, \Xi \right) \quad \text{and} \quad p : \text{constant} \quad (65)$$

kütleçekim alan denklemleri

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{2} \Theta_{\mu\nu}, \quad \Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \left[\tilde{T}_{\mu\nu} + \frac{4\Lambda}{\kappa^2} g_{\mu\nu} \right], \quad \kappa^2 = 16\pi G \quad (66)$$

$$\Gamma(\varphi) = 1 - \frac{\kappa^2}{2} \sum_{m=0} \beta_m \ell^{2(m+1)} (\nabla \varphi)^{2(m+1)} \quad (67)$$

çözülecektir.

Metrik fonksiyonu

$$h(r) = \frac{(1 + 8GM)r^4 - \Lambda r^6 - 8\pi G\alpha_1 p^2 r^4 \log(r) + 4\pi G\alpha_2 \ell^2 p^4 + 2\pi G\alpha_3 \ell^4 p^6 r^2}{8\pi G\beta_0 \ell^2 p^2 r^2 + 24\pi G\beta_1 \ell^4 p^4 + r^4}, \quad p = \sqrt{\frac{M}{2\pi}} \quad (68)$$

olmak üzere tek kopya sonuçları

$$F^{\mu\nu} = \Xi h'(r) \begin{pmatrix} 0 & -\Xi & 0 \\ \Xi & 0 & \frac{a}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{a}{\ell^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (69)$$

$$J^\mu = \Xi g(r) \left(\Xi, 0, \frac{a}{\ell^2} \right) = 4\Xi g(r) V^\mu, \quad (70)$$

olarak bulunur. Burada $g(r)$

$$\begin{aligned} g(r) = & \left\{ \sum_{n=2}^3 \sum_{m=0}^1 4r^{2(m-n)} 512\pi^3 \alpha_n \beta_m^2 G^3 r^2 (m-n+2)^2 l^{4m+2n+4} p^{4m+2n+4} \right. \\ & - 64\pi^2 \alpha_n \beta G^2 (m^2 + 2(m+3)n - 2n^2 - 3) r^{2m+4} l^{2(m+n+1)} p^{2(m+n+1)} \\ & + 64\pi^2 \beta_m^2 G^2 l^{4m+4} p^{4m+8} r^{2n} (8Gl^2(m+1)^2 M - (m+2)^2 r^2) \\ & + 8\pi\alpha_1 \beta G(m+1) l^{2m+4} p^{2m+8} r^{2n} [8\pi\beta Gl^{2m+2} p^{2m+2} ((m+1)\log(r) + 1) \\ & + r^{2m+2} (1 - (m+1)\log(r))] + 8\pi\alpha G(n-1)^2 l^{2n} r^{4m+6} p^{2n} \\ & \left. - 8\pi\beta_m Gl^{2m+2} p^{2m+6} r^{2(m+n+1)} (8Gl^2(m+1)^2 M - (m^2 - 3)r^2) - p^4 r^{4m+2n+6} \right\} \\ & \times \left\{ \sum_{m=0}^1 l^2 p^4 (8\pi\beta Gl^{2m+2} p^{2m+2} + r^{2m+2})^3 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (71)$$

şeklindeki karmaşık formda bir fonksiyondur.



5 SONUÇ

Bu projede statik kara delik çözümlerinden dönen kara delik çözümü elde etme mekanizması olarak iteleme dönüşümleri uygulanmış, elde edilen dönen kara delik çözümleri klasik çift kopyanın standart formalizmi kapsamında incelenmiştir.

Buradan yola çıkarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

1. $D=3$ 'e özgü olan statik çözümlerden dönen çözüm elde etme mekanizmasının literatürdeki farklı örnekleri araştırılıp anlaşılmış,
2. Elde edilen dönen çözümlerden Kerr - Schild (KS) çift kopya formülasyonu yardımıyla Maxwell teorisindeki karşılıkları elde edilmiştir. Bu kapsamda doğru Maxwell denklemlerinin elde edilebilmesi için gereken formülasyonun (Alkac vd., 2021b)'ta derlenen formülasyon olduğu sonucuna ulaşılmıştır.
3. Maxwell teorisinin elektrostatik çözümlerinden dönen yeni çözüm elde etmeyi sağlayan bir mekanizmanın varlığı ve özellikleri araştırılmıştır. Bu yöntem bilinen tüm statik artalana sahip biçimde KS formuna sokulabilen metrikler için uygulanabilir. Bunun için öncelikle Maxwell denkleminin statik artalan metriğinde bulunacak metrik fonksiyonunun $(h(r))$ bulunması gerekir. Ardından bu fonksiyonun karışık indisli Ricci tensörünün $\mu 0$ bileşenleri dışındaki bileşenleri için de iz üzerinden çevrilmiş Einstein denklemlerini sağlayıp sağlamadığı gösterilir. Sağlaması halinde elde edilen yeni metrik çözümünden iteleme (*boost*) dönüşümü sayesinde dönen bir karadelik çözümü elde edilebilecektir.



Referanslar

- Alkac, G., Gumus, M. K., & Olpak, M. A. 2021a. “Kerr-Schild double copy of the Coulomb solution in three dimensions”. *Phys. Rev. D*, 104(4), 044034.
- Alkac, G., Gumus, M. K., & Olpak, M. A. 2022. “Generalized black holes in 3D Kerr-Schild double copy”. *Phys. Rev. D*, 106(2), 026013.
- Alkac, G., Gumus, M. K., & Tek, M. 2021b. “The Kerr-Schild Double Copy in Lifshitz Spacetime”. *JHEP*, 05, 214.
- Carrillo González, M., Melcher, B., Ratliff, K., Watson, S., & White, C. D. 2019. “The classical double copy in three spacetime dimensions”. *JHEP*, 07, 167.
- Gumus, M. K., & Alkac, G. 2020. “More on the classical double copy in three spacetime dimensions”. *Phys. Rev. D*, 102(2), 024074.
- Lemos, J. P. S. 1995. “Cylindrical black hole in general relativity”. *Phys. Lett. B*, 353, 46–51.
- Lemos, J. P. S., & Zanchin, V. T. 1996. “Rotating charged black string and three-dimensional black holes”. *Phys. Rev. D*, 54, 3840–3853.
- Monteiro, R., O’Connell, D., & White, C. D. 2014. “Black holes and the double copy”. *JHEP*, 12, 056.