

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Dr. Öğr. Üyesi ÖZER SELÇUK
Proje No:	119K030
Proje Başlığı:	Kısıtlı İşbirliği Olan Devredilebilir Fayda Oyunları İçin Çözüm Kavramları
Proje Türü:	1001 - Araştırma
Proje Süresi:	17
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	İSTANBUL MEDENİYET Ü. SİYASAL BİLGİLER F.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/10/2019 - 01/03/2021
Onaylanan Bütçe:	219000.0
Harcanan Bütçe:	85340.0
Öz:	Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları, bir devredilebilir fayda oyunu ve oyuncu kümesinin bir bölüntüsünün kombinasyonundan oluşur. Bu oyunlardaki oyuncu kümesinin bölüntüsü, oyuncular arasındaki işbirliği imkânlarını temsil eder. Bu projede koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları çalışılmıştır. Söz konusu oyunlar için, Dayanışma Değeri ve Uyum Değeri adında iki ayrı çözüm kavramı literatüre kazandırılmış ve aksiyomatik karakterizasyonları yapılmıştır. Dayanışma Değeri ve Uyum Değeri, koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunundaki bölüntüye bağlı olarak tanımlanan sınırlı oyunların Shapley Değeri olarak tanımlanmıştır. Dayanışma Değeri için tanımlanan sınırlı oyun, bölüntünün herhangi bir elemanının temsili için bölüntü elemanının tek bir üyesinin yeterli olduğu kabulüne dayanır. Uyum Değeri için tanımlanan sınırlı oyuna göre ise, bölüntünün herhangi bir elemanının temsili için bölüntü elemanındaki bütün oyunculara ihtiyaç duyulmaktadır.
Anahtar Kelimeler:	Devredilebilir Fayda Oyunları, Kısıtlı İşbirliği, Shapley Değer, Myerson Değeri, Owen Değeri
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Evet



Kısıtlı İşbirliği Olan Devredilebilir Fayda Oyunları için Çözüm Kavramları

Program Kodu: 1001

Proje No: 119K030

Proje Yürütücüsü:
Dr. Öğr. Üyesi Özer SELÇUK

Bursiyerler:

Yıldız SERDAR

Hameed HALLIM

NİSAN 2021

İSTANBUL

Önsöz

Bu projede, kısıtlı işbirliği olan ve bu kısıtlı işbirliğinin oyuncu kümesinin bir bölüntüsü ile temsil edildiği devredilebilir fayda oyunları çalışılmıştır. Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu olarak adlandırılan bu oyunlar için iki ayrı çözüm kavramı literatüre kazandırılmış ve bu çözüm kavramlarının aksiyomatik karakterizasyonları yapılmıştır.

Bu proje Tübitak tarafından desteklenmiştir.

İçindekiler

	Bölüm	Sayfa
1.	Giriş	1-2
2.	Literatür Özeti	2-4
3.	Gereç ve Yöntem	4-5
3.1	Dayanışma Değeri	5-6
3.2	Uyum Değeri	7-8
4.	Bulgular	9
4.1	Dayanışma Değeri ile İlgili Bulgular	9-16
4.2	Uyum Değeri ile İlgili Bulgular	16-22
5.	Tartışma / Sonuç	22-23
6.	Kaynakça	24

Özet

Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları, bir devredilebilir fayda oyunu ve oyuncu kümesinin bir bölüntüsünün kombinasyonundan oluşur. Bu oyunlardaki oyuncu kümesinin bölüntüsü, oyuncular arasındaki işbirliği imkânlarını temsil eder. Bu projede koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları çalışılmıştır. Söz konusu oyunlar için, Dayanışma Değeri ve Uyum Değeri adında iki ayrı çözüm kavramı literatüre kazandırılmış ve aksiyomatik karakterizasyonları yapılmıştır. Dayanışma Değeri ve Uyum Değeri, koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunundaki bölüntüye bağlı olarak tanımlanan sınırlı oyunların Shapley Değeri olarak tanımlanmıştır. Dayanışma Değeri için tanımlanan sınırlı oyun, bölüntünün herhangi bir elemanın temsili için bölüntü elemanının tek bir üyesinin yeterli olduğu kabulüne dayanır. Uyum Değeri için tanımlanan sınırlı oyuna göre ise, bölüntünün herhangi bir elemanının temsili için bölüntü elemanındaki bütün oyunculara ihtiyaç duyulmaktadır.

Anahtar kelimeler: Devredilebilir Fayda Oyunları, Kısıtlı İşbirliği, Shapley Değer, Myerson Değeri, Owen Değeri

Abstract

TU-games with coalition structure are obtained by combining a TU-game and a partition of the set of players. The partition of the set of players in such games represents the cooperation possibilities among the players. In this project, the solidarity value and the unison value for TU-games with coalition structure are introduced, and their axiomatic characterization are provided. Both the Solidarity Value and the Unison Value are defined as the Shapley Value of appropriately defined restricted games induced by the partition of the set of players. Given a TU-game with coalition structure, the restricted game defined for the solidarity value assumes that each element of the partition can be represented by any of its members. On the other hand, the restricted game defined for the unison value requires the existence of all members to represent an element of the partition.

Keywords: Transferable Utility Games, Restricted Cooperation, Shapley Value, Myerson Value, Owen Value

1. GİRİŞ

Devredilebilir fayda oyunları, oyuncuların işbirliği yaparak koalisyonlar oluşturabildiği ve bu koalisyonlarca elde edilen değerin koalisyondaki oyunculara kısıtsız bir şekilde dağıtılabildiği durumları inceler. Literatürde devredilebilir fayda oyunları ile ilgili en sık çalışılan konu, bütün oyunculardan oluşan “büyük koalisyonun” elde edeceği değerin bireysel oyunculara nasıl dağıtılacağı sorusudur. Devredilebilir fayda oyunlarındaki bu dağıtım problemine cevap veren ilk ve literatürdeki en bilinen çözüm kavramı (dağıtım yöntemi) Shapley Değeri’dir. Shapley Değeri, bir oyuncunun onu içermeyen bütün koalisyonlara katılması durumunda, koalisyonların değerlerinde yaratacağı artışların (marjinal katkılarının) ağırlıklı ortalaması olarak tanımlanmıştır. Shapley Değerinin etkinlik, simetriklik, etkisiz oyuncu ve doğrusallık özelliklerini sağlayan tek dağıtım yöntemi olduğu gösterilmiştir.

Devredilebilir fayda oyunlarındaki en temel kabul, oyuncuların herhangi bir kısmının bir araya gelip koalisyon oluşturabilmesidir. Bununla birlikte, gerçek hayatta kurulabilecek olan koalisyonlar ekonomik ve sosyal yapı yanında birçok faktör tarafından da kısıtlanmaktadır. Shapley Değeri’nden sonra, literatürde oyuncular arasındaki işbirliğinin kısıtlı olduğu durumları ele alan bir çok çalışma yapılmıştır. Yapılan bu çalışmalar arasında, oyuncular arasındaki kısıtlı işbirliğinin oyuncu kümesinin bir bölüntüsü ile temsil edildiği çalışmalar da mevcuttur. Bu tip oyunlar koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu olarak adlandırılmıştır. Literatürdeki koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunlarını ele alan çalışmalarda, bölüntü elemanlarının bir bütün halinde hareket ettiği varsayılmıştır.

Bu projede koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları çalışılmış, oyuncular arasındaki kısıtlı işbirliği imkânlarını temsil eden bölüntünün her bir elemanı “blok” olarak adlandırılmıştır. Aynı bloğun üyesi olan oyuncular arasında işbirliğinin kısıtlı olmadığı kabul edilmiştir. Dolayısıyla aynı bloğun üyesi olan oyuncuların oluşturduğu koalisyonlar, oyunda bu koalisyon için tanımlanan değeri elde edilebilmektedir. Bununla birlikte, farklı bloklardan oyuncuların bir araya gelmesi ile oluşan koalisyonlar için ise, bir bloğun üyelerinin bu bloğu ne derecede temsil edebildiği üzerinden iki farklı yaklaşım benimsenmiştir.

Benimsenen ilk yaklaşımda, her bir oyuncunun ait olduğu bloğu tam olarak temsil edebildiği kabul edilmiştir. Bu yaklaşıma göre, bir oyuncunun bir koalisyona katılması, bu oyuncunun ait olduğu bloktaki bütün oyuncularının koalisyon ile işbirliğine girmesi olarak görülmektedir. Dolayısıyla, bir oyuncunun bir koalisyona yaptığı marjinal katkı hesaplanırken kendi bloğundaki bütün oyuncular o koalisyona katılmış gibi değerlendirilmektedir. Bu sebeple bir

koalisyonda değişik bloklara ait oyuncular mevcut ise, bu koalisyonun elde edebileceği değer oyuncuların ait olduğu blokların bileşiminin elde edebileceği değere eşıt olmaktadır.

Benimsenen ikinci yaklaşıma göre ise, bir bloğun temsili için bloğun tüm üyelerinin mevcudiyeti gerekmektedir. Dolayısıyla, bir oyuncunun bir koalisyona katılması ile yapacağı marjinal katkı, kendi bloğundaki tüm oyuncular hâlihazırda o koalisyonda ise bloğun katkısına eşıt olacaktır. Bununla birlikte oyuncunun ait olduğu bloktaki tüm oyuncular koalisyonda mevcut değil ise, oyuncunun koalisyona yapacağı marjinal katkı, sadece koalisyonda bulunan ve kendi bloğundan olan oyunculara olan katkısına eşıt olacaktır.

Bahsedilen bu iki farklı yaklaşıma bağlı olarak, koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları için iki yeni çözüm kavramı literatüre kazandırılmıştır. Proje kapsamında, bu çözüm kavramlarının sağladıkları özellikler ortaya konulmuş ve aksiyomatik karakterizasyonları yapılmıştır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Shapley (1953) tarafından literatüre kazandırılan Shapley Değeri, devredilebilir fayda oyunları için tanımlanmış en bilinen çözüm kavramıdır. Shapley Değeri'nin hesaplanmasındaki en temel kabul, oyuncular arasında işbirliğinin kısıtlı olmaması, bütün koalisyonların kurulabilmesi ve devredilebilir fayda oyununda tanımlanan değeri elde edebilmesidir. Shapley değeri hesaplanırken oyuncu kümesi üzerinde tanımlı bütün permütasyonlar göz önüne alınır. Her bir permütasyonda, her bir oyuncu için kendisinden önce permütasyonda beliren oyunculara katılması durumunda yaptığı katkılar yani marjinal katkılar hesaplanır. Shapley Değeri'ne göre, bir devredilebilir fayda oyununda her bir oyuncunun dağıtımdan alacağı pay, söz konusu permütasyonlarda oyuncunun yaptığı marjinal katkılarının ortalamasıdır.

Literatürde Shapley Değeri'nin temel kabulünü sorgulayan ve oyuncular arasında işbirliği imkânlarının kısıtlı olduğunu varsayan birçok çalışma mevcuttur. Myerson (1977), oyuncular arasındaki işbirliği kısıtlarını, oyuncu kümesi üzerinde tanımlı bir iletişim ağ yapısı (communication network) ile modeller. Bu tip oyunlara, iletişim yapısı olan devredilebilir fayda oyunları ismini verilmiştir. Bu yaklaşıma göre herhangi bir koalisyonun kurulabilmesi ve oyunda tanımlanan değeri elde edebilmesi için, verili olan ağ yapısında koalisyon üyelerinin birbirine bağlı bir küme oluşturmaları gerekmektedir. Birbirine bağlı olmayan oyunculardan oluşan koalisyonlar için ise elde edilebilecek değer, koalisyonun iletişim ağ yapısındaki parçalarının değerlerinin toplamı olarak tanımlanmıştır. Myerson (1977) kısıtlı işbirliğini temsil eden iletişim ağ yapısını temel alarak, her bir koalisyonun elde edebileceği değeri yeniden

hesaplayan bir sınırlı oyun tanımlar. İletişim yapısı olan devredilebilir fayda oyunu için Myerson Değeri, bu sınırlı oyunun Shapley Değeri'ne eşittir. Myerson Değeri'nin en önemli özelliği iletişim ağ yapısındaki merkezi konumda bulunan oyuncuların büyük koalisyonun değerinin paylaşılmasında kayırılmasıdır.

Owen (1977) ise devredilebilir fayda oyunlarındaki kısıtlı işbirliği imkânlarının oyuncu kümesinin bir bölüntüsü (partition) ile temsil edildiğini kabul eder. Bu tip oyunlar, literatürde koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları olarak adlandırılmıştır. Oyuncular arasındaki kısıtlı işbirliği imkanlarını temsil eden bölüntünün her bir elemanını “birlik” olarak adlandıran Owen (1977), birliklerin bir bütün halinde hareket ettiğini varsayar. Owen Değeri iki aşamalı bir Shapley Değeri olarak görülebilir. Bu çözüm kavramına göre, büyük koalisyonun elde edebileceği değer önce birliklere Shapley yöntemi kullanılarak dağıtılır. Daha sonra ise her birliğin kazancı, birliğin üyelerine yine Shapley yöntemi kullanarak paylaşılır. Shapley Değeri'nden farklı olarak Owen Değeri oyuncu kümesi üzerinde tanımlı bütün permütasyonlardan ziyade, aynı birliğe ait oyuncuların ardışık olarak belirttiği permütasyonları ve bu permütasyonlar için tanımlanan marjinal katkıları göz önüne almaktadır. Dolayısıyla, Owen (1977) aynı birliğe üye oyuncuların işbirliğinin farklı birliklere üye oyunculara göre daha olası olduğunu kabul etmiştir. Aumann ve Dreze (1974), Owen (1977) gibi koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunlarını çalışmıştır. Bununla birlikte, Owen (1977)'den farklı olarak, Aumann ve Dreze (1974) bir birlik içinde işbirliğinin kısıtsız olduğunu, farklı birliklere ait oyuncuların işbirliğinin ise mümkün olmadığını kabul etmiştir. Aumann ve Dreze (1974), bu gibi durumlarda Shapley Değeri benzeri (marjinal katkıları dikkate alan) çözüm kavramlarını çalışmıştır.

Oyuncu kümesinin bir bölüntüsü haricinde, oyuncular arasındaki işbirliği kısıtlarını temsil etmesi için çeşitli küme sistemlerini (set systems) kullanan çalışmalar da mevcuttur. Algaba vd. (2001) çalışmasında, oyuncular arasındaki kısıtlı işbirliği imkânları birleşim altında durağan küme sistemleri (union stable cooperation structures) ile temsil edilmiştir. Ayrıca Bilbao ve Edelman (2000) konveks geometrileri (convex geometries), Bilbao vd. (2001) matroidleri (matroids), Algaba vd. (2003) antimatroidleri (antimatroids), Ui vd. (2011) tam küme sistemlerini (complete coalition structures) ve Koshevoy ve Talman (2014) inşa kümelerini (building sets) kullanmışlardır. Oyuncu kümesinin bölüntüsü (partition) ile kıyaslandığında, bahsedilen küme sistemleri hem çok karmaşık hem de gerçek hayatta karşılığı pek bulunmayan yapılardır.

Bu projede, Owen (1977)'de olduğu gibi koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları çalışılmıştır. Oyuncular arasındaki işbirliği kısıtlarını temsil eden oyuncu kümesi üzerinde tanımlı bölüntünün her bir elemanı “blok” olarak adlandırılmıştır. Aynı bloğun üyesi oyuncuların oluşturduğu koalisyonlar için işbirliğinin kısıtlı olmadığı ve dolayısıyla bu

koalisyonların devredilebilir fayda oyununda tanımlanan değeri elde edebileceği kabul edilmiştir. Owen (1977)'den farklı olarak, bu projede, blokların bir bütün halinde hareket etmek zorunda olmadığı kabul edilmiştir. Farklı bloklardan oyuncuların bir araya gelmesi ile oluşan koalisyonlar için, blok üyelerinin kendi bloklarını ne derecede temsil ettiği üzerinden iki farklı yaklaşım benimsenmiştir.

Birinci yaklaşıma göre bir bloğun tek bir üyesi bütün bloğu temsil edebilmektedir. Dolayısıyla bir bloğun bir üyesinin bir koalisyona katılması, bloğun tüm katkısının koalisyona yansıtılması için yeterlidir. Bu durumda, farklı bloklardan oyuncuların yer aldığı bir koalisyonun elde edebileceği değer, oyuncuların ait olduğu blokların bir araya gelmesi ile (blokların birleşiminin) elde edebileceği değere eşit olacaktır. İkinci yaklaşıma göre ise, bir bloğun temsili için bloğun tüm üyelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Dolayısıyla bir bloğun katkısının bir koalisyona yansıtılabilmesi için, bloğun tüm üyelerinin koalisyonda bulunması gerekmektedir. Bir bloğun sadece bazı üyelerinin bir koalisyona katılması ile oluşacak marjinal katkı, bu oyuncuların elde edebileceği değer koalisyona eklenmesi olacaktır.

Bu projede Myerson Değeri'ne benzer şekilde, bahsedilen iki yaklaşımı temel alan, her bir koalisyonun elde edebileceği değeri yeniden hesaplayan iki farklı sınırlı oyun tanımlanmıştır. Tanımlanan bu sınırlı oyunların Shapley Değeri, koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları için çözüm kavramları olarak literatüre kazandırılmıştır. Literatüre kazandırılan bu çözüm kavramlarına Dayanışma Değeri ve Uyum Değeri isimleri verilmiştir.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

G_N^P , içinde n tane oyuncu barındıran tüm koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları kümesini gösterebilir. Bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu $(N, v, P) \in G_N^P$ üçlüsü ile temsil edilir. Bu gösterimde $N = \{1, \dots, n\}$ oyuncu kümesini, $v: 2^N \rightarrow R$ oyundaki her bir koalisyonun kendi başına elde edebileceği değeri, $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ ise oyuncu kümesinin bir bölüntüsünü (partition) göstermektedir. P bölüntüsünün her bir elemanına *blok* adı verilmiştir.

Kazanç vektörü, $x \in R^n$, n boyutlu bir vektör olmak üzere $x_i \in R$ oyundaki $i \in N$ oyuncusunun kazancını göstermektedir. Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları için bir çözüm kavramı, $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$, her bir oyuna bir kazanç vektörü atayan bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla bir çözüm kavramı, her bir koalisyon yapısı olan devredilebilir

fayda oyunu için bireysel oyuncuların ne kadar kazanç elde edeceğini belirten bir fonksiyondur. $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ bir çözüm kavramı olmak üzere, $\xi_i(N, v, P)$ gösterimi $i \in N$ oyuncusunun $(N, v, P) \in G_N^P$ oyununda elde edeceği kazancı göstermektedir.

Benzer şekilde, G_N , içinde n tane oyuncu barındıran tüm (işbirliği imkânlarının kısıtlı olmadığı) devredilebilir fayda oyunları kümesini göstermek üzere, bir devredilebilir fayda oyunu $(N, v) \in G_N$ ikilisi ile temsil edilmektedir. Bu gösterimde $N = \{1, \dots, n\}$ oyuncu kümesini ve $v: 2^n \rightarrow R$ oyundaki her bir koalisyonun kendi başına elde edebileceği değeri göstermektedir. Devredilebilir fayda oyunları için tanımlanan bir çözüm kavramı, $\xi: G_N \rightarrow R^n$, her bir oyuna bir kazanç vektörü atayan bir fonksiyondur. Devredilebilir fayda oyunları için literatürdeki en bilinen çözüm kavramı Shapley Değeri'dir. Herhangi bir devredilebilir fayda oyunu için, Shapley Değeri hesaplanırken oyuncu kümesi üzerinde tanımlı her bir permütasyon için marjinal katkı vektörü bulunur ve bu marjinal katkı vektörlerinin ortalaması hesaplanır. Bir permütasyona karşılık gelen marjinal katkı vektöründe, bir oyuncunun elde edeceği kazanç, permütasyonda kendisinden önce gelen oyuncuların kümesine yaptığı marjinal katkı olarak tanımlanmıştır. Herhangi bir devredilebilir fayda oyunu, $(N, v) \in G_N$, için $\pi: N \rightarrow N$ oyuncu kümesi üzerinde tanımlı bir permütasyon olsun ve $\pi(i)$ bu permütasyonda $i \in N$ oyuncusunun sıralaması olsun. $\pi^i = \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$ kümesi bu permütasyonda $i \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuların kümesini gösterebilir ve $\bar{\pi}^i = \pi^i \cup \{i\}$ olsun. Söz konusu π permütasyonuna karşılık gelen marjinal katkı vektörü, $m^\pi \in R^n$, şu şekilde tanımlanır:

$$m_i^\pi = v(\bar{\pi}^i) - v(\pi^i), \quad \forall i \in N.$$

Π_N , oyuncu kümesi $N = \{1, \dots, n\}$ üzerinde tüm tanımlı tüm permütasyonların kümesini gösterebilir (hatırlatmak gerekir oyunda n adet oyuncu var ise toplam $n!$ adet permutasyon söz konusudur). Herhangi bir devredilebilir fayda oyunu, $(N, v) \in G_N$, için Shapley Değeri $Sh(N, v)$, bütün permütasyonların marjinal katkı vektörlerinin ortalamasına eşittir. Yani $Sh(N, v)$, şu şekilde tanımlanmıştır:

$$Sh(N, v) = \sum_{\pi \in \Pi} \frac{m^\pi(N, v)}{n!}.$$

3.1 DAYANIŞMA DEĞERİ

Dayanışma Değeri (Solidarity Value) için bir bloğun her bir üyesinin söz konusu bloğu temsil edebileceği yaklaşımı benimsenmiştir. Bu yaklaşım altında her bir koalisyonun elde edebileceği değerin, bu koalisyonda temsil edilen bloklara, yani oyundaki işbirliği kısıtlarına

bağlı olarak tanımlanması gerekmektedir. Herhangi bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu verildiğinde, Dayanışma Değeri'nin en temel ögesi olan ve her bir koalisyonun elde edebileceği değeri oyuncu kümesinin bölüntüsünü göz önüne alarak hesaplayan sınırlı oyunun (restricted game) tanımı aşağıdaki gibidir.

Herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ ve $S \in 2^N$ için, $P|_S$, S koalisyonu içinde temsil edilen blokları, $\bar{P}|_S$ ise S koalisyonu içinde temsil edilen blokların bileşimini gösterebilir (Yani, her bir $P_k \in P$ için $P_k \cap S \neq \emptyset \Rightarrow P_k \in P|_S$ ve $\bar{P}|_S = \bigcup_{P_k \in P|_S} P_k$). Verili bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu $(N, v, P) \in G_n^P$ için sınırlı oyun, $v_A^P: 2^N \rightarrow R$, her koalisyona içinde temsil edilen blokların bileşiminin değerini verecek şekilde aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$v_A^P(S) = v(\bar{P}|_S), \forall S \in 2^N.$$

Koalisyon yapısı olan bir devredilebilir fayda oyunu verildiğinde, Dayanışma Değeri için tanımlanan sınırlı oyunun nasıl oluşturulduğu aşağıdaki basit örnekte açıklanmıştır.

Örnek:

Koalisyon yapısı olan bir devredilebilir fayda oyunu $(N, v, P) \in G_N^P$ alalım. $N = \{1,2,3\}$, $v(S) = |S|^2$ ve $P = \{\{1,2\}, \{3\}\}$ olsun. Dayanışma Değeri için tanımlanan sınırlı oyun, $v_A^P: 2^N \rightarrow R$, aşağıdaki gibidir.

$$v_A^P(\{1\}) = v(\{1,2\}) = 4$$

$$v_A^P(\{2\}) = v(\{1,2\}) = 4$$

$$v_A^P(\{3\}) = v(\{3\}) = 1$$

$$v_A^P(\{1,2\}) = v(\{1,2\}) = 4$$

$$v_A^P(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 9$$

$$v_A^P(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 9$$

$$v_A^P(\{1,2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 9$$

Bu örnekte,

$$\{1\} \text{ koalisyonunda, sadece } \{1,2\} \text{ bloğu temsil edildiği için } v_A^P(\{1\}) = v(\{1,2\}) = 4$$

$$\{2\} \text{ koalisyonunda, sadece } \{1,2\} \text{ bloğu temsil edildiği için } v_A^P(\{2\}) = v(\{1,2\}) = 4$$

$$\{3\} \text{ koalisyonunda, sadece } \{3\} \text{ bloğu temsil edildiği için } v_A^P(\{3\}) = v(\{3\}) = 1$$

$$\{1,2\} \text{ koalisyonunda, sadece } \{1,2\} \text{ bloğu temsil edildiği için } v_A^P(\{1,2\}) = v(\{1,2\}) = 4$$

$$\{1,3\} \text{ koalisyonunda, } \{1,2\} \text{ ve } \{3\} \text{ blokları temsil edildiği için } v_A^P(\{1,2\}) = v(\{1,2\} \cup \{3\}) = v(\{1,2,3\}) = 9$$

$$\{2,3\} \text{ koalisyonunda, } \{1,2\} \text{ ve } \{3\} \text{ blokları temsil edildiği için } v_A^P(\{1,3\}) = v(\{1,2\} \cup \{3\}) = v(\{1,2,3\}) = 9$$

$\{1,2,3\}$ koalisyonunda, $\{1,2\}$ ve $\{3\}$ blokları temsil edildiği için $v_A^P(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\} \cup \{3\}) = v(\{1,2,3\}) = 9$ olmaktadır.

Sınırlı oyunun tanımına göre bir koalisyonda değişik bloklardan oyuncular mevcut ise, sınırlı oyunda bu koalisyonun elde edebileceği değer, oyuncuların ait olduğu blokların bileşiminin elde edebileceği değere eşittir. Tanımlanan bu sınırlı oyunun Shapley değeri ise Dayanışma Değeri olarak tanımlanmış ve $A: G_N^P \rightarrow R^n$ ile gösterilmiştir. Yani, herhangi bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu $(N, v, P) \in G_n^P$ için Dayanışma Değeri $A(N, v, P) = Sh(N, v_A^P)$.

3.2 UYUM DEĞERİ

Uyum Değeri için bir bloğun ancak tüm üyelerinin varlığı ile temsil edilebileceği yaklaşımı benimsenmiştir. Bu yaklaşıma göre, bir koalisyonda farklı bloklardan oyuncular arasında işbirliğinin mümkün olabilmesi için, blokların tüm üyelerinin bu koalisyon içinde mevcudiyeti gerekmektedir. Bu yaklaşıma uygun bir şekilde, kısıtlı işbirliği olan bir devredilebilir fayda oyunu verildiğinde, her bir koalisyonun elde edebileceği değeri hesaplayan sınırlı oyunun (restricted game) tanımı aşağıdaki gibi yapılmıştır.

Herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ ve $S \in 2^N$ için $P|_S^+$, S koalisyonu içinde bütünüyle temsil edilen blokları, $\bar{P}|_S^+$ ise S koalisyonu içinde bütünüyle temsil edilen blokların bileşimini gösterebilir (her bir $P_k \in P$ için $P_k \subseteq S \Rightarrow P_k \in P|_S^+$ ve $\bar{P}|_S^+ = \bigcup_{P_k \in P|_S^+} P_k$). $P|_S^-$ ise S koalisyonunda kısmen temsil edilen blokları göstermektedir (her bir $P_k \in P$ için $P_k \in P|_S$ ve $P_k \not\subseteq S \Rightarrow P_k \in P|_S^-$).

Herhangi bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu $(N, v, P) \in G_n^P$ verildiğinde, Uyum Değeri için tanımlanan sınırlı oyunda, $v_O^P: 2^N \rightarrow R$, her bir koalisyonun değeri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$v_O^P(S) = v(\bar{P}|_S^+) + \sum_{P_k \in P|_S^-} v(S \cap P_k), \quad \forall S \in 2^N.$$

Uyum Değeri için tanımlanan bu sınırlı oyuna göre bir koalisyonun değeri, bu koalisyonda bütünüyle temsil edilen blokların bileşiminin değerine kısmen temsil edilen blok parçalarının değerlerinin toplamının eklenmesiyle bulunur.

Verili bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyununda, Uyum Değeri için tanımlanan sınırlı oyunun nasıl oluşturulduğu aşağıdaki basit örnekte açıklanmıştır.

Örnek:

Koalisyon yapısı olan bir devredilebilir fayda oyunu $(N, v, P) \in G_N^P$ alalım. $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $v(S) = |S|^2$ ve $P = \{\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}\}$ olsun. Uyum Değeri için tanımlanan sınırlı oyunda seçilmiş bazı koalisyonların değerleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$v_O^P(\{1\}) = v_O^P(\{2\}) = v_O^P(\{3\}) = v_O^P(\{4\}) = v_O^P(\{5\}) = v_O^P(\{6\}) = v_O^P(\{7\}) = 1$$

$$v_O^P(\{1,2\}) = v(\{1,2\}) = 4$$

$$v_O^P(\{1,3\}) = v(\{1\}) + v(\{3\}) = 2$$

$$v_O^P(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) + v(\{3\}) = 5$$

$$v_O^P(\{1,2,3,4\}) = v(\{1,2\}) + v(\{3,4\}) = 8$$

$$v_O^P(\{1,3,4,5\}) = v(\{1\}) + v(\{3,4,5\}) = 10$$

$$v_O^P(\{1,3,4,6\}) = v(\{1\}) + v(\{3,4\}) + v(\{6\}) = 6$$

$$v_O^P(\{1,2,3,4,5\}) = v(\{1,2,3,4,5\}) = 25$$

$$v_O^P(\{1,2,6\}) = v(\{1,2\}) + v(\{6\}) = 5$$

$$v_O^P(\{1,2,6,7\}) = v(\{1,2,6,7\}) = 16$$

$$v_O^P(\{1,2,3,6\}) = v(\{1,2\}) + v(\{3\}) + v(\{6\}) = 6$$

$$v_O^P(\{1,2,3,6,7\}) = v(\{1,2,6,7\}) + v(\{3\}) = 17$$

$$v_O^P(\{1,2,3,4,6,7\}) = v(\{1,2,6,7\}) + v(\{3,4\}) = 20$$

$$v_O^P(\{1,2,3,4,5,6\}) = v(\{1,2,3,4,5\}) + v(\{6\}) = 26$$

$$v_O^P(\{1,2,3,4,5,6,7\}) = v(\{1,2,3,4,5,6,7\}) = 49$$

Bu örnekte,

$\{1,2,3,4,6,7\}$ koalisyonunda, $\{1,2\}$ ve $\{6,7\}$ blokları tam olarak temsil edildiği ve $\{3,4,5\}$ bloğu kısmen temsil edildiği için $v_O^P(\{1,2,3,4,6,7\}) = v(\{1,2,6,7\}) + v(\{3,4\}) = 20$ olmaktadır.

$\{1,2,3,4,5,6\}$ koalisyonunda, $\{1,2\}$ ve $\{3,4,5\}$ blokları tam olarak temsil edildiği ve $\{6,7\}$ bloğu kısmen temsil edildiği için $v_O^P(\{1,2,3,4,5,6\}) = v(\{1,2,3,4,5\}) + v(\{6\}) = 26$ olmaktadır. $\{1,3,4,6\}$ koalisyonunda, $\{1,2\}$, $\{3,4,5\}$ ve $\{6,7\}$, blokları kısmen temsil edildiği için $v_O^P(\{1,3,4,6\}) = v(\{1\}) + v(\{3,4\}) + v(\{6\}) = 6$ olmaktadır. $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ koalisyonunda, $\{1,2\}$, $\{3,4,5\}$ ve $\{6,7\}$, tam olarak temsil edildiği için $v_O^P(\{1,2,3,4,5,6,7\}) = v(\{1,2,3,4,5,6,7\}) = 49$ olmaktadır.

Uyum Değeri için oluşturulan sınırlı oyunun tanımına göre bir koalisyonda bütünüyle temsil edilen bloklar bileşimlerinin değerini koalisyona yansıtabilmektedirler. Koalisyonda kısmen temsil edilen blokların oyuncularını ise işbirliğine girememekte, sadece kendi değerlerini yansıtmaktadırlar. Tanımlanan bu sınırlı oyunun Shapley Değeri Uyum Değeri olarak

tanımlanmıştır ve $O: G_N^P \rightarrow R^n$ ile gösterilmiştir. Yani, herhangi bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu $(N, v, P) \in G_n^P$ için Uyum Değeri $O(N, v, P) = Sh(N, v_O^P)$.

4.BULGULAR

Bu bölümde, proje kapsamında literatüre kazandırılan Dayanışma Değeri'nin ve Uyum Değeri'nin sağladığı özellikler gösterilmiş ve aksiyomatik karakterizasyonları yapılmıştır.

4.1 DAYANIŞMA DEĞERİ İLE İLGİLİ BULGULAR

Öncelikle, Dayanışma Değeri'nin, $A: G_N^P \rightarrow R^n$, literatürde çok bilinen Etkinlik (Efficiency) ve Doğrusallık (Linearity) özelliklerini sağladığı tespit edilmiştir.

Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları için tanımlanmış bir çözüm kavramının etkin olabilmesi için, bütün oyuncuların bulunduğu büyük koalisyonun değerinin, $v(N)$ 'nin, eksiksiz bir şekilde oyunculara dağıtması gerekmektedir. Şöyle ki; koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları üzerinde tanımlı bir çözüm kavramının, $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$, Etkinlik Özelliği'ni sağlaması her bir $(N, v, P) \in G_n^P$ için $\sum_{i \in N} \xi_i(N, v, P) = v(N)$ olması demektir.

Dayanışma Değeri'nin Etkinlik Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Dayanışma Değeri'nin Etkinlik Özelliği'ni sağladığını görmek için, herhangi bir oyun $(N, v, P) \in G_n^P$ ve permütasyon $\pi \in \Pi_N$ alalım. Dayanışma Değeri için tanımlanan sınırlı oyunun tanımı gereği $v_A^P(N) = v(\bar{P}|_N) = v(N)$ eşitliği sağlanacaktır. $v_A^P(N) = v(N)$ olduğu için ve marjinal katkı vektörünün tanımı gereği $\sum_{i \in N} m_i^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(N) = v(N)$ eşitliği sağlanır. Yani, herhangi bir permütasyon için tanımlanan marjinal katkı vektöründe oyuncuların toplam kazancı $v(N)$ 'e eşittir. Dayanışma Değeri'nin bütün permütasyonlar için hesaplanan marjinal katkı vektörlerinin ortalaması olması sebebiyle, Dayanışma Değeri'nde bütün oyuncuların kazançlarının toplamı $v(N)$ 'e eşit olacaktır. Bu sebeple Dayanışma Değeri Etkinlik Özelliği'ni sağlamaktadır.

Dayanışma Değeri'nin Doğrusallık Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları için tanımlanmış bir çözüm kavramının Doğrusallık Özelliğini sağlaması, herhangi iki oyuna uygulanması durumunda çözüm kavramının vereceği kazanç vektörlerinin doğrusal kombinasyonunun, çözüm kavramının

oyunların aynı doğrusal kombinasyonuna uygulanması durumunda ortaya çıkacak kazanç vektörüne eşit olması olarak tanımlanmıştır. Şöyle ki, herhangi iki koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu $(N, v, P), (N, w, P) \in G_n^P$ ve $\alpha, \beta \in R$ alalım. Bu iki oyunun doğrusal kombinasyonu $(N, \alpha v + \beta w, P) \in G_n^P$ oyunu olacaktır. Bir çözüm kavramının, $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$, Doğrusallık Özelliği'ni sağlaması için $\alpha \xi(N, v, P) + \beta \xi(N, w, P) = \xi(N, \alpha v + \beta w, P)$ olması gerekir. Shapley Değerinin Doğrusallık Özelliği'ni sağlaması ve Dayanışma Değeri'nin tanımlanan sınırlı oyunun Shapley Değeri olması sebebiyle Dayanışma Değeri'nin Doğrusallık Özelliği'ni sağladığı açıktır.

Dayanışma Değeri'nin hiç katkı yapmayan blokların üyesi olan oyunculara dağıtımda sıfır kazanç verdiği, benzer katkıları olan bloklardaki oyunculara ise benzer kazançlar sağladığı görülmüştür. Bu kapsamda, literatürde var olmayan *Etkisiz Blok Özelliği* (Dummy Block Property), *Blok İçi Simetriklik* (Intrablock Symmetry) ve *Bloklar Arası Simetriklik* (Interblock Symmetry) özelliklerinin tanımları yapılmış ve Dayanışma Değeri'nin bu özellikleri sağladığı ispatlanmıştır. Literatüre kazandırılan bu özelliklerin her biri, bütün oyuncuların işbirliği sonucunda üretilen değer bireysel oyunculara adil bir şekilde dağıtılmasını gözetmektedir.

Etkisiz Blok Özelliği, herhangi bir koalisyona katılması durumunda, koalisyonun elde edebileceği değere sıfır katkı yapan (marjinal katkısı sıfır olan) bir bloğun tüm üyelerinin dağıtımdan sıfır kazanç elde etmesi olarak tanımlanmıştır. Etkisiz Blok Özelliği'nin tanımına göre; herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ ve $P_k \in P$ için $v(S \cup P_k) = v(S)$, $\forall S \in 2^N$ ise $\xi_i(N, v, P) = 0, \forall i \in P_k$ olmalıdır. Dayanışma Değeri'nin, tanımlanan sınırlı oyunun, v_A^P 'nin, Shapley Değeri olduğunu hatırlayalım. Shapley Değeri ise oyuncuların kendilerini içermeyen koalisyonlara katılırken yaptıkları marjinal katkılarının (ağırlıklı) ortalamasına eşittir. Yukarıda tanımlanan sınırlı oyunda, her bir oyuncunun herhangi bir permütasyonda yapacağı marjinal katkı, üyesi olduğu bloğun diğer bloklara marjinal katkısına veya sıfıra eşit olacaktır. Bu durumda, bir oyuncunun üyesi olduğu bloğun diğer bloklara marjinal katkısı da sıfıra eşit ise, bu oyuncu için sınırlı oyunda Shapley Değeri sıfır olacaktır. Dolayısıyla, Dayanışma Değeri bu oyuncuya sıfır kazanç verecektir.

Dayanışma Değeri'nin Etkisiz Blok Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ alım. Bir $P_k \in P$ için $v(S \cup P_k) = v(S)$, $\forall S \in 2^N$ olsun. $P_k \in P$ bloğunun her bir üyesi $i \in P_k$ için $A_i(N, v, P) = 0$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bunun için herhangi bir permütasyon $\pi \in \Pi_N$ alalım. Bu permütasyonda $i \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuların kümesi $S = \{j \in N: \pi(j) < \pi(i)\}$ olsun. Bu permütasyona karşılık gelen marjinal katkı vektöründe $i \in N$ oyuncusunun marjinal katkısı $m_i^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(S \cup$

$\{i\}) - v_A^P(S) = v(\bar{P}|_S \cup P_k) - v(\bar{P}|_S)$ olacaktır. P_k bloğu için $v(S \cup P_k) = v(S)$, $\forall S \in 2^N$ olmasından dolayı, $v(\bar{P}|_S \cup P_k) - v(\bar{P}|_S) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, $m_i^\pi(N, v_A^P) = 0$ olur. Dayanışma Değeri'nde $i \in N$ oyuncusunun alacağı kazanç, bütün permütasyonlarda yaptığı marjinal katkıların ortalaması olmasından dolayı, bu durum $A_i(N, v, P) = 0$ anlamına gelir.

Blok İçi Simetriklik Özelliği, bir bloğun tüm üyelerinin dağıtımdan eşit pay alması olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla, bir çözüm kavramının, $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$, Blok İçi Simetriklik Özelliği'ni sağlaması için; her bir $(N, v, P) \in G_n^P$ ve $P_k \in P$ için $\xi_i(N, v, P) = \xi_j(N, v, P)$, $\forall i, j \in P_k$ olmalıdır. Dayanışma Değeri'nin, yukarıda tanımlanan sınırlı oyunun, v_A^P 'nin, Shapley Değeri olduğunu hatırlayalım. Shapley Değeri ise oyuncuların kendilerini içermeyen koalisyonlara katılırken yaptıkları marjinal katkıların (ağırlıklı) ortalamasına eşittir. Dayanışma Değeri için tanımlanan sınırlı oyunda, her bir oyuncunun yapacağı marjinal katkı ya ait olduğu bloğun marjinal katkısına ya da sifıra eşit olacaktır. Aynı bloğa ait iki oyuncu için, sınırlı oyundaki marjinal katkıların (ağırlıklı) ortalamasının aynı olduğu gerçeğinden hareketle, Dayanışma Değeri'nin Blok İçi Simetriklik Özelliği'ni sağladığı gösterilmiştir.

Dayanışma Değeri'nin Blok İçi Simetriklik Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ ve $P_k \in P$ alalım. Her bir $i, j \in P_k$ için $A_i(N, v, P) = A_j(N, v, P)$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bunun için herhangi bir permütasyon $\pi \in \Pi_N$ alalım ve genelliği kaybetmeden $\pi(i) < \pi(j)$ olduğunu kabul edelim. $S = \{s \in N : \pi(s) < \pi(i)\}$ kümesi π permütasyonunda $i \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuları; $Q = \{q \in N : \pi(q) < \pi(j)\}$ kümesi ise π permütasyonunda $j \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuları gösterebilir. İki tane olası durum vardır:

DURUM 1: $\exists i' \in P_k$, öyle ki $\pi(i') < \pi(i)$

Bu durumda, $P_k \subseteq \bar{P}|_S$ ve $P_k \subseteq \bar{P}|_Q$ olmalıdır. Dolayısıyla $m_i^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(S \cup \{i\}) - v_A^P(S) = v(\bar{P}|_S \cup P_k) - v(\bar{P}|_S) = 0$ ve $m_j^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(Q \cup \{j\}) - v_A^P(Q) = v(\bar{P}|_Q \cup P_k) - v(\bar{P}|_Q) = 0$ olmalıdır.

DURUM 2: $\pi(i) \leq \pi(i')$, $\forall i' \in P_k$

Bu durumda, $m_i^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(S \cup \{i\}) - v_A^P(S) = v(\bar{P}|_S \cup P_k) - v(\bar{P}|_S)$ ve $m_j^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(Q \cup \{j\}) - v_A^P(Q) = v(\bar{P}|_Q \cup P_k) - v(\bar{P}|_Q) = 0$ olmalıdır. $\pi \in \Pi_N$ permütasyonu için, $\pi'(i) = \pi(j)$, $\pi'(j) = \pi(i)$ ve $\pi'(l) = \pi(l) \forall l \in \{N \setminus \{i, j\}\}$ olacak şekilde bir $\pi' \in \Pi_N$ permütasyonu yazabiliriz. Bu $\pi' \in \Pi$ permütasyonu için $m_j^{\pi'}(N, v_A^P) = v_A^P(S \cup \{i\}) - v_A^P(S) = v(\bar{P}|_S \cup P_k) - v(\bar{P}|_S) = m_i^\pi(N, v_A^P)$ ve $m_i^{\pi'}(N, v_A^P) = v_A^P(Q \cup \{j\}) - v_A^P(Q) = v(\bar{P}|_Q \cup P_k) - v(\bar{P}|_Q) = 0 = m_j^\pi(N, v_A^P)$ olur. Dayanışma Değeri bütün permütasyonlara karşılık gelen

marjinal katkı vektörlerinin ortalaması olduğundan dolayı, iki olası durumun bir sonucu olarak $A_i(N, v, P) = A_j(N, v, P)$ eşitliği sağlanır.

Bloklar Arası Simetriklik Özelliği, herhangi bir koalisyona katılması durumunda aynı katkıyı yapan ve diğer bloğun yer aldığı koalisyonlara sıfır katkı yapan iki bloğun tüm üyelerinin dağıtımdan eşit pay alması olarak tanımlanmıştır. Bloklar Arası Simetriklik Özelliği için öncelikle simetrik blokların tanımı yapılmıştır. Bu tanıma göre; herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ için $P_k, P_m \in P$ simetrik bloklardır ancak ve ancak $v(S \cup P_k) = v(S \cup P_m) = v(S \cup P_k \cup P_m)$, $\forall S \in 2^N$. Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları için tanımlanmış bir çözüm kavramının Bloklar Arası Simetriklik Özelliği'ni sağlıyor olması için; herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ ve simetrik bloklar $P_k, P_m \in P$ için $\xi_i(N, v, P) = \xi_j(N, v, P)$, $\forall i, j \in P_k \cup P_m$ olmalıdır. Dayanışma Değeri, yukarıda tanımlanan sınırlı oyunun, v_A^P 'nin, Shapley Değeri olarak tanımlanmıştır. Shapley Değeri ise oyuncuların kendilerini içermeyen koalisyonlara katılırken yaptıkları marjinal katkılarının (ağırlıklı) ortalamasına eşittir. Herhangi bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyununda iki bloğun simetrik olması, bu bloklardaki bütün oyuncuların sınırlı oyunda benzer marjinal katkıları yapacağı gerçeğinden hareketle, Dayanışma Değeri'nin Bloklar Arası Simetriklik Özelliği'ni sağladığı gösterilmiştir.

Dayanışma Değeri'nin Bloklar Arası Simetriklik Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ ve simetrik olan $P_k, P_m \in P$ alalım. Herhangi $i \in P_k$ ve $j \in P_m$ için $A_i(N, v, P) = A_j(N, v, P)$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bunun için herhangi bir permütasyon $\pi \in \Pi_N$ alalım ve genelliği kaybetmeden $\pi(i) < \pi(j)$ olduğunu kabul edelim. $S = \{s \in N : \pi(s) < \pi(i)\}$ kümesi π permütasyonunda $i \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuları; $Q = \{q \in N : \pi(q) < \pi(j)\}$ kümesi ise π permütasyonunda $j \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuları gösterebilir. $\pi(i) < \pi(j)$ olmasından dolayı $P_k \subseteq \bar{P}|_Q$ olur. İki olası durum söz konusudur.

DURUM 1: $\exists i' \in P_k$, öyle ki $\pi(i') < \pi(i)$

Bu durumda, $P_k \subseteq \bar{P}|_S$ ve $P_k \subseteq \bar{P}|_Q$ olmalıdır. $\pi \in \Pi_N$ permütasyonu için $m_i^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(S \cup \{i\}) - v_A^P(S) = v(\bar{P}|_S \cup P_k) - v(\bar{P}|_S)$ ve $m_j^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(Q \cup \{j\}) - v_A^P(Q) = v(\bar{P}|_Q \cup P_m) - v(\bar{P}|_Q)$ olur. $P_k \subseteq \bar{P}|_S$ olduğu için $m_i^\pi(N, v_A^P) = v(\bar{P}|_S \cup P_k) - v(\bar{P}|_S) = 0$ eşitliği sağlanır. Ayrıca, $P_k \subseteq \bar{P}|_Q$ ve P_k ile P_m simetrik bloklar olması sebebiyle, $m_j^\pi(N, v_A^P) = v(\bar{P}|_Q \cup P_m) - v(\bar{P}|_Q) = 0$ eşitliği de sağlanır.

DURUM 2: $\pi(i) \leq \pi(i') \forall i' \in P_k$

Bu durumda $P_k \subseteq \bar{P}|_Q$ olmalıdır. $\pi \in \Pi_N$ permütasyonu için $m_i^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(S \cup \{i\}) - v_A^P(S) = v(\bar{P}|_S \cup P_k) - v(\bar{P}|_S)$ ve $m_j^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(Q \cup \{j\}) - v_A^P(Q) = v(\bar{P}|_Q \cup P_m) - v(\bar{P}|_Q)$

olmalıdır. P_k ve P_m simetrik bloklar olduğu ve $P_k \subseteq \bar{P}|_Q$ olduğu için $v(\bar{P}|_Q \cup P_m) = v(\bar{P}|_Q)$ olur. Dolayısıyla $m_j^\pi(N, v_A^P) = v_A^P(Q \cup \{i\}) - v_A^P(Q) = v(\bar{P}|_Q \cup P_m) - v(\bar{P}|_Q) = 0$ eşitliği sağlanır. $\pi \in \Pi_N$ permütasyonu için, $\pi'(i) = \pi(j)$, $\pi'(j) = \pi(i)$ ve $\pi'(l) = \pi(l) \forall l \in \{N \setminus \{i, j\}\}$ olacak şekilde tek bir $\pi' \in \Pi_N$ permütasyonu yazabiliriz. Bu $\pi' \in \Pi$ permütasyonu için $m_j^{\pi'}(N, v_A^P) = v(\bar{P}|_S \cup P_m) - v(\bar{P}|_S)$ ve $m_i^{\pi'}(N, v_A^P) = v(\bar{P}|_Q \cup P_k) - v(\bar{P}|_Q)$ olur. P_k ve P_m simetrik bloklar olduğu için, $v(\bar{P}|_S \cup P_m) = v(\bar{P}|_S \cup P_k)$ ve $v(\bar{P}|_Q \cup P_k) = v(\bar{P}|_Q \cup P_m)$ olur. Dolayısıyla, $m_j^{\pi'}(N, v_A^P) = v(\bar{P}|_S \cup P_m) - v(\bar{P}|_S) = v(\bar{P}|_S \cup P_k) - v(\bar{P}|_S) = m_i^\pi(N, v_A^P)$ ve $m_i^{\pi'}(N, v_A^P) = v(\bar{P}|_Q \cup P_k) - v(\bar{P}|_Q) = v(\bar{P}|_Q \cup P_m) - v(\bar{P}|_Q) = m_j^\pi(N, v_A^P)$. Dayanışma Değeri'nin bütün permütasyonlara karşılık gelen marjinal katkı vektörlerinin ortalaması olduğundan dolayı, bu durum $A_i(N, v, P) = A_j(N, v, P)$ olmasını gerektirir.

Bu projede son olarak Dayanışma Değeri'nin, koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları üzerinde tanımlı, Etkinlik, Doğrusallık, Etkisiz Blok ve Bloklar Arası Simetriklik özelliklerini sağlayan yegâne çözüm kavramı olduğu gösterilmiş, yani aksiyomatik karakterizasyonu yapılmıştır.

Literatürdeki ispatların genelinde devredilebilir fayda oyunlarının, Oybirliği Oyunları'nın (Unanimity Games) doğrusal bir kombinasyonu (linear combination) olarak ifade edilebileceği gerçeğinin kullanılmaktadır. Dayanışma Değeri'nin karakterizasyonunda ise, literatürdeki çalışmalardan farklı olarak, devredilebilir fayda oyunlarının, İkili Oybirliği Oyunları'nın (Dual Unanimity Games) bir doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilebileceği gerçeğinden faydalanılmıştır. Herhangi bir oyuncu kümesi N ve $S \in 2^N$ için İkili Oybirliği Oyunu, $(N, u_S^*) \in G_N$, şöyle tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} u_S^*(Q) &= 1 \quad \text{eğer } Q \cap S \neq \emptyset \\ u_S^*(Q) &= 0 \quad \text{eğer } Q \cap S = \emptyset \end{aligned}$$

Herhangi bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyununun, İkili Oybirliği Oyunları'nın doğrusal bir kombinasyonu olarak nasıl yazılabileceği aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Örnek:

Bir tane koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu (N, v, P) alalım. $N = \{1, 2, 3\}$ olsun. Karakteristik fonksiyon ise $v: 2^N \rightarrow R$ ise aşağıdaki gibi olsun.

$$v(\{1\}) = 2$$

$$v(\{2\}) = 1$$

$$\begin{aligned}
v(\{3\}) &= 4 \\
v(\{1,2\}) &= 3 \\
v(\{1,3\}) &= 6 \\
v(\{2,3\}) &= 4 \\
v(\{1,2,3\}) &= 6
\end{aligned}$$

Yukarıdaki koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu $u_{\{1\}}^*$, $u_{\{3\}}^*$ ve $u_{\{2,3\}}^*$ İkili Oybirliği Oyunlarının bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılabilir. Şöyle ki; $v(Q) = 2.u_{\{1\}}^*(Q) + 3.u_{\{3\}}^*(Q) + u_{\{2,3\}}^*(Q)$, $\forall Q \in 2^N$ veya $(N, v, P) = 2.(N, u_{\{1\}}^*, P) + 3.(N, u_{\{3\}}^*, P) + (N, u_{\{2,3\}}^*, P)$.
Bunu görmek için

$$\begin{aligned}
Q = \{1\} \text{ alalım. } u_{\{1\}}^*(\{1\}) &= 1, u_{\{3\}}^*(\{1\}) = 0, u_{\{2,3\}}^*(\{1\}) = 0 \text{ olmasından dolayı} \\
v(\{1\}) &= 2 = 2.u_{\{1\}}^*(\{1\}) + 3.u_{\{3\}}^*(\{1\}) + 1.u_{\{2,3\}}^*(\{1\}) = 2.1 + 3.0 + 1.0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = \{2\} \text{ alalım. } u_{\{1\}}^*(\{2\}) &= 0, u_{\{3\}}^*(\{2\}) = 0, u_{\{2,3\}}^*(\{2\}) = 1 \text{ olmasından dolayı} \\
v(\{2\}) &= 1 = 2.u_{\{1\}}^*(\{2\}) + 3.u_{\{3\}}^*(\{2\}) + 1.u_{\{2,3\}}^*(\{2\}) = 2.0 + 3.0 + 1.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = \{3\} \text{ alalım. } u_{\{1\}}^*(\{3\}) &= 0, u_{\{3\}}^*(\{3\}) = 1, u_{\{2,3\}}^*(\{3\}) = 1 \text{ olmasından dolayı} \\
v(\{3\}) &= 4 = 2.u_{\{1\}}^*(\{3\}) + 3.u_{\{3\}}^*(\{3\}) + 1.u_{\{2,3\}}^*(\{3\}) = 2.0 + 3.1 + 1.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = \{1,2\} \text{ alalım. } u_{\{1\}}^*(\{1,2\}) &= 1, u_{\{3\}}^*(\{1,2\}) = 0, u_{\{2,3\}}^*(\{1,2\}) = 1 \text{ olmasından dolayı} \\
v(\{1,2\}) &= 3 = 2.u_{\{1\}}^*(\{1,2\}) + 3.u_{\{3\}}^*(\{1,2\}) + 1.u_{\{2,3\}}^*(\{1,2\}) = 2.1 + 3.0 + 1.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = \{1,3\} \text{ alalım. } u_{\{1\}}^*(\{1,3\}) &= 1, u_{\{3\}}^*(\{1,3\}) = 1, u_{\{2,3\}}^*(\{1,3\}) = 1 \text{ olmasından dolayı} \\
v(\{1,3\}) &= 6 = 2.u_{\{1\}}^*(\{1,3\}) + 3.u_{\{3\}}^*(\{1,3\}) + 1.u_{\{2,3\}}^*(\{1,3\}) = 2.1 + 3.1 + 1.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = \{2,3\} \text{ alalım. } u_{\{1\}}^*(\{2,3\}) &= 0, u_{\{3\}}^*(\{2,3\}) = 1, u_{\{2,3\}}^*(\{2,3\}) = 1 \text{ olmasından dolayı} \\
v(\{2,3\}) &= 4 = 2.u_{\{1\}}^*(\{2,3\}) + 3.u_{\{3\}}^*(\{2,3\}) + 1.u_{\{2,3\}}^*(\{2,3\}) = 2.0 + 3.1 + 1.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Son olarak } Q = \{1,2,3\} \text{ alalım. } u_{\{1\}}^*(\{1,2,3\}) &= 1, u_{\{3\}}^*(\{1,2,3\}) = 1, u_{\{2,3\}}^*(\{1,2,3\}) = 1 \\
&\text{ olmasından dolayı} \\
v(\{1,2,3\}) &= 6 = 2.u_{\{1\}}^*(\{1,2,3\}) + 3.u_{\{3\}}^*(\{1,2,3\}) + 1.u_{\{2,3\}}^*(\{1,2,3\}) = 2.1 + 3.1 + 1.1
\end{aligned}$$

Dayanışma Değeri'nin karakterizasyonu yapılırken, Dayanışma Değeri'nin Doğrusallık Özelliği'ni sağladığı ve her bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyununun İkili Oybirliği Oyunları'nın bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılabileceği gerçeğinden faydalanılmıştır. Bu amaçla, öncelikle Dayanışma Değeri'nin, karakteristik fonksiyonu İkili Oybirliği Oyunu olan bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyununda her bir oyuncuya dağıtacağı kazançlarının ne kadar olacağı gösterilmiştir. Daha açıklayıcı olmak gerekirse, herhangi bir $S \in 2^N$ ve $(N, u_S^*, P) \in G_N^P$ için $A_i(N, u_S^*, P) = \frac{1}{|\bar{P}|_S}$, $\forall i \in \bar{P}|_S$ ve $A_i(N, u_S^*, P) = 0$, $\forall i \in N \setminus \bar{P}|_S$ olduğu gösterilmiştir.

$(N, u_S^*, P) \in G_N^P$ için $A_i(N, u_S^*, P) = \frac{1}{|\bar{P}|_S}$ $\forall i \in \bar{P}|_S$ ve $A_i(N, u_S^*, P) = 0$ $\forall i \in N \setminus \bar{P}|_S$ olduğunun

ispatı:

Herhangi bir $S \in 2^N$ ve $(N, u_S^*, P) \in G_N^P$ alalım. $(N, u_S^*, P) \in G_N^P$ için herhangi bir $P_d \in P$ için $P_d \notin P|_S$ ise $u_S^*(Q \cup P_d) = u_S^*(Q)$, $\forall Q \in 2^N$ olmaktadır. Yani P_d bloğu etkisiz blok olmaktadır. Dayanışma Değeri'nin Etkisiz Blok Özelliği'ni sağladığından dolayı, $A_i(N, u_S^*, P) = 0$, $\forall i \in N \setminus \bar{P}|_S$ olur. Ayrıca $(N, u_S^*, P) \in G_N^P$ oyununda herhangi iki $P_k, P_m \in P$ için $P_k \in P|_S$ ve $P_m \in P|_S$ ise P_k ve P_m blokları simetrik bloklardır. Dayanışma Değeri'nin Etkinlik ve Bloklar Arası Simetriklik özelliklerini sağladığından dolayı $A_i(N, u_S^*, P) = \frac{1}{|\bar{P}|_S}$ $\forall i \in \bar{P}|_S$ olur.

Dayanışma Değeri'nin Aksiyomatik Karakterizasyonu:

Dayanışma Değeri'nin aksiyomatik karakterizasyonu için, Dayanışma Değeri'nin Etkinlik, Doğrusallık, Etkisiz Blok, Bloklar Arası Simetriklik özelliklerini sağladığını ve Etkinlik, Doğrusallık, Etkisiz Blok ve Bloklar Arası Simetriklik özelliklerini sağlayan herhangi bir çözüm kavramının Dayanışma Değeri ile aynı kazanç dağıtımını yapacağını göstermemiz gerekmektedir. Halihazırda, Dayanışma Değeri'nin bahsi geçen dört özelliği sağladığı gösterilmiştir.

Şimdi; Etkinlik, Etkisiz Blok Özelliği ve Bloklar Arası Simetriklik özelliklerini sağlayan herhangi bir çözüm kavramı $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ ve herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ alalım. Herhangi bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu, İkili Oybirliği Oyunları'nın bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılabildiği için $(N, v, P) = \sum_{S \in 2^N} \lambda_S(N, u_S^*, P)$, $\lambda_S \in R$ olsun. $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü Doğrusallık Özelliği'ni sağladığı için $\xi(N, v, P) = \sum_{S \in 2^N} \lambda_S \xi(N, u_S^*, P)$ olur. Dolayısıyla $\xi(N, u_S^*, P) = A(N, u_S^*, P)$, $\forall S \in 2^N$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Öncelikle (N, u_S^*, P) oyununda, eğer bir $P_k \in P$ için $P_k \notin P|_S$ ise P_k etkisiz blok olacaktır ve $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü Etkisiz Blok Özelliği'ni sağladığı için $\xi_i(N, u_S^*, P) = 0$, $\forall i \in P_k$ olacaktır. Dolayısıyla,

$\xi_i(N, u_S^*, P) = 0, \forall i \in N \setminus \bar{P}|_S$ olacaktır. Ayrıca, herhangi $P_k, P_m \in P$ için $P_k \in P|_S$ ve $P_m \in P|_S$ ise P_k ve P_m blokları simetrik bloklar olacaktır ve $\xi; G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü Bloklar Arası Simetriklik Özelliği'ni sağlaması sebebiyle, bu blokların tüm üyeleri dağılımdan eşit pay alacaklardır. $\xi; G_N^P \rightarrow R^n$ çözümünün Etkinlik Özelliği'ni sağlaması ve $u_S^*(N) = 1$ olması sebebiyle $\xi_i(N, u_S^*, P) = \frac{1}{|\bar{P}|_S}, \forall i \in \bar{P}|_S$ olacaktır. Sonuç olarak, karakteristik fonksiyonu İkili Oybirliği Oyunu olan herhangi bir kısıtlı işbirliği olan devredilebilir fayda oyununda, $(N, u_S^*, P) \in G_N^P$, Dayanışma Değeri ve $\xi; G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü oyunculara aynı kazançları dağıtmaktadır. Her bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyununun, İkili Oybirliği Oyunları'nın bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılabilmesi ve Dayanışma Değeri'nin Doğrusallık Özelliğini sağlaması sebebiyle Dayanışma Değeri ile $\xi; G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü birebir örtüşmektedir.

4.2 UYUM DEĞERİ İLE İLGİLİ BULGULAR

Öncelikle Dayanışma Değeri'ne benzer şekilde, Uyum Değeri'nin, $O: G_N^P \rightarrow R^n$, de Etkinlik ve Doğrusallık özelliklerini sağladığı tespit edilmiştir.

Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları için tanımlanmış bir çözüm kavramının etkin olabilmesi için, oyunculara dağıtılan toplam kazanç miktarının bütün oyuncuların bulunduğu büyük koalisyonun değerine, $v(N)$ 'e, eşit olması gerektiğini hatırlayalım. Şöyle ki; $\xi; G_N^P \rightarrow R^n$ çözüm kavramının Etkinlik Özelliği'ni sağlaması için her bir $(N, v, P) \in G_n^P$ için $\sum_{i \in N} \xi_i(N, v, P) = v(N)$ eşitliği sağlanmalıdır.

Uyum Değeri'nin Etkinlik Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Uyum Değeri'nin Etkinlik Özelliği'ni sağladığını görmek için, herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ ve permütasyon $\pi \in \Pi_N$ alalım. Uyum Değeri için tanımlanan sınırlı oyunun tanımı gereği $v_O^P(N) = v(\bar{P}|_N^+) = v(N)$ eşitliği sağlanacaktır. $v_O^P(N) = v(N)$ olduğu için ve marjinal katkı vektörünün tanımı gereği $\sum_{i \in N} m_i^\pi(N, v_O^P) = v_O^P(N) = v(N)$ eşitliği sağlanır. Yani, herhangi bir permütasyon için tanımlanan marjinal katkı vektöründe oyuncuların toplam kazancı $v(N)$ 'e eşit olacaktır. Uyum Değeri'nin bütün permütasyonlar için hesaplanan marjinal katkı vektörlerinin ortalaması olması sebebiyle, Uyum Değeri'nde bütün oyuncuların kazançlarının toplamı $v(N)$ 'e eşit olacaktır. Yani için $\sum_{i \in N} O_i(N, v, P) = v(N)$ eşitliği sağlanacaktır.

Etkinlik Özelliği'nin yanında, Uyum Değeri Doğrusallık Özelliği'ni de sağlamaktadır.

Dayanışma Değeri'nin Doğrusallık Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunları için tanımlanmış bir çözüm kavramının Doğrusallık Özelliği'ni sağlaması için, verili herhangi iki oyuna uygulanması durumunda vereceği kazanç vektörlerinin doğrusal kombinasyonunun, çözüm kavramının oyunların aynı doğrusal kombinasyonuna uygulanması durumunda ortaya çıkacak kazanç vektörüne eşit olması gerekmektedir. Şöyle ki, herhangi iki oyun $(N, v, P), (N, w, P) \in G_n^P$ ve bu oyunların doğrusal kombinasyonu olan $(N, \alpha v + \beta w, P) \in G_n^P$ oyunu alalım $(\alpha, \beta \in R)$. Bir çözüm kavramının, $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$, Doğrusallık Özelliği'ni sağlaması için $\alpha \xi(N, v, P) + \beta \xi(N, w, P) = \xi(N, \alpha v + \beta w, P)$ olması gerekir. Shapley Değerinin Doğrusallık Özelliği'ni sağlaması ve Uyum Değeri'nin tanımlanan sınırlı oyunun Shapley Değeri olması sebebiyle Uyum Değeri'nin de Doğrusallık Özelliği'ni sağlamaktadır.

Dayanışma Değeri'nden farklı olarak, Uyum Değeri'nde, marjinal katkıları sıfıra eşit olan bloklardaki oyuncular (ait oldukları blok içindeki katkılarına bağlı olarak) dağıtımdan sıfırdan farklı kazançlar elde edebilmektedir. Dolayısıyla Uyum Değeri Etkisiz Blok Özelliği'ni sağlamaktadır. Bu kapsamda, literatürde var olmayan Etkisiz Oyuncu Özelliği (Dummy Player Property) tanımlanmıştır. Etkisiz Oyuncu Özelliği'ne göre; kendi bloğundan oyuncuların oluşturduğu koalisyona katılması durumunda katkısı sıfır olan ve ait olduğu bloğun herhangi bir koalisyona katkısı bloğun kendi başına elde edebileceği değere eşit olan oyuncular dağıtımdan sıfır kazanç elde etmeleri gerekmektedir. Şöyle ki; koalisyon yapısı olan bir devredilebilir fayda oyununda, $(N, v, P) \in G_N^P$, herhangi bir $i \in N$ oyuncusunun etkisiz oyuncu olması $v(S \cup \{i\}) = v(S)$, $\forall S \subseteq P|_{\{i\}}$ ve $v(Q \cup P|_{\{i\}}) = v(Q) + v(P|_{\{i\}})$, $\forall Q \subseteq N \setminus P|_{\{i\}}$ eşitliklerinin sağlanması demektir. Bir çözüm kavramının, $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$, Etkisiz Oyuncu Özelliği'ni sağlıyor olması için, oyundaki etkisiz oyunculara dağıtımda sıfır kazanç vermesi gerekmektedir.

Uyum Değeri'nin Etkisiz Oyuncu Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ alım ve $i \in N$ oyuncusu etkisiz oyuncu olsun. $O_i(N, v, P) = 0$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bunun için herhangi bir permütasyon $\pi \in \Pi_N$ alalım. Bu permütasyonda $i \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuların kümesi $S = \{j \in N: \pi(j) < \pi(i)\}$ olsun. İki olası durum vardır.

DURUM 1: $\pi(i) \geq \pi(i'), \forall i' \in P|_{\{i\}}$

$\pi(i) \geq \pi(i'), \forall i' \in P|_{\{i\}}$ ise $P|_{\{i\}} \subseteq S \cup \{i\}$ olmalıdır. $S \setminus P|_{\{i\}} = Q$ olsun. Bu durumda $m_i^\pi(N, v_O^P) = v(\bar{P}|_Q^+ \cup P|_{\{i\}}) + \sum_{P_k \in P|_Q^-} v(Q \cap P_k) - v(\bar{P}|_Q^+) - \sum_{P_k \in P|_Q^-} v(Q \cap P_k) - v(P|_{\{i\}} \setminus \{i\})$ olur. $i \in N$ oyuncusunun etkisiz oyuncu olması $v(P|_{\{i\}} \setminus \{i\}) = v(P|_{\{i\}})$ ve $v(\bar{P}|_Q^+ \cup P|_{\{i\}}) =$

$v(\bar{P}|_Q^+) + v(P|_{\{i\}})$ eşitliklerinin sağlanması demektir. Bu durum, $m_i^\pi(N, v_O^P) = 0$ olmasını gerektirir.

DURUM 2: $\exists i' \in P|_{\{i\}}$ öyle ki $\pi(i') \geq \pi(i)$

$S \setminus P|_{\{i\}} = Q$ ve $S \cap P|_{\{i\}} = T$ olsun. Bu durumda $m_i^\pi(N, v_O^P) = v(\bar{P}|_Q^+) + \sum_{P_k \in P|_{\bar{Q}}} v(Q \cap P_k) + v(T) - v(\bar{P}|_Q^+) - \sum_{P_k \in P|_{\bar{Q}}} v(Q \cap P_k) - v(T \setminus \{i\})$. $i \in N$ oyuncusu etkisiz oyuncu olduğu için $v(T \setminus \{i\}) = v(T)$ olur. Dolayısıyla $m_i^\pi(N, v_O^P) = 0$ olur. Uyum Değeri bütün permütasyonlar için tanımlanan marjinal katkı vektörlerinin ortalamasına eşit olması sebebiyle, iki olası durum $O_i(N, v, P) = 0$ olmasını gerektirir.

Bu özelliklerin yanında, Uyum Değeri tarafından sağlanan Simetrik Oyuncu Özelliği (Player Symmetry) ve Simetrik Blok Özelliği (Block Symmetry) literatüre kazandırılmıştır.

Koalisyon yapısı olan bir devredilebilir fayda oyununda, aynı bloğun üyesi iki oyuncunun simetrik olması için kendi bloklarından oyunculara aynı marjinal katkıları yapmaları gerekmektedir. Şöyle ki; koalisyon yapısı olan bir devredilebilir fayda oyununda, $(N, v, P) \in G_N^P$, herhangi bir $P_k \in P$ ve $i, j \in P_k$ için i ve j oyuncularının simetrik oyuncular olması $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, $\forall S \subseteq P_k \setminus \{i, j\}$ eşitliğinin sağlanması demektir. Bir çözüm kavramının, $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$, Simetrik Oyuncu Özelliği'ni sağlıyor olması için, simetrik oyunculara dağıtımda eşit kazanç vermesi gerekmektedir.

Uyum Değeri'nin Simetrik Oyuncu Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ alım. Herhangi bir $P_k \in P$ için $i, j \in P_k$ oyuncuları simetrik oyuncular olsun. $O_i(N, v, P) = O_j(N, v, P)$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bunun için herhangi bir permütasyon $\pi \in \Pi_N$ alalım ve genelliği kaybetmeden $\pi(j) < \pi(i)$ olsun. $i \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuların kümesi $S = \{i' \in N: \pi(i') < \pi(i)\}$ ve $j \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuların kümesi $Q = \{i' \in N: \pi(i') < \pi(j)\}$ olsun. İki olası durum vardır.

DURUM 1: $\pi(i) \geq \pi(i')$, $\forall i' \in P_k$

$Q \cap P_k = R$ ve $(S \setminus \{j\}) \cap P_k = T$ olsun. Bu durumda $m_i^\pi(N, v_O^P) = v(\bar{P}|_S^+ \cup P_k) - v(\bar{P}|_S^+) - v(T \cup \{j\})$ ve $m_j^\pi(N, v_O^P) = v(R \cup \{j\}) - v(R)$ olur. $\pi \in \Pi_N$ permütasyonu için, $\pi'(i) = \pi(j)$, $\pi'(j) = \pi(i)$ ve $\pi'(l) = \pi(l)$, $\forall l \in \{N \setminus \{i, j\}\}$ olacak şekilde bir $\pi' \in \Pi_N$ permütasyon yazabiliriz. Bu $\pi' \in \Pi$ permütasyonunda $m_j^{\pi'}(N, v_O^P) = v(\bar{P}|_S^+ \cup P_k) - v(\bar{P}|_S^+) - v(T \cup \{i\})$ ve $m_i^{\pi'}(N, v_O^P) = v(R \cup \{i\}) - v(R)$ olur. i ve j oyuncularının simetrik oyuncular olması, $v(T \cup$

$\{i\}) = v(T \cup \{j\})$ ve $v(R \cup \{i\}) = v(R \cup \{j\})$ demektir. Dolayısıyla, $m_j^{\pi'}(N, v_O^P) = m_i^{\pi}(N, v_O^P)$ ve $m_i^{\pi'}(N, v_O^P) = m_j^{\pi}(N, v_O^P)$ olur.

DURUM 2: $\exists i' \in P_k$ öyle ki $\pi(i') \geq \pi(i)$

$Q \cap P_k = R$ ve $(S \setminus \{j\}) \cap P_k = T$ olsun. Bu durumda $m_i^{\pi}(N, v_O^P) = v(T \cup \{i, j\}) - v(T \cup \{j\})$ ve $m_j^{\pi}(N, v_O^P) = v(R \cup \{j\}) - v(R)$ olur. $\pi \in \Pi_N$ permütasyonu için, $\pi'(i) = \pi(j)$, $\pi'(j) = \pi(i)$ ve $\pi'(l) = \pi(l), \forall l \in \{N \setminus \{i, j\}\}$ olacak şekilde bir $\pi' \in \Pi_N$ permütasyon yazabiliriz. Bu $\pi' \in \Pi$ permütasyonunda $m_j^{\pi'}(N, v_O^P) = v(T \cup \{i, j\}) - v(T \cup \{i\})$ ve $m_i^{\pi'}(N, v_O^P) = v(R \cup \{i\}) - v(R)$ olur. i ve j simetrik oyuncular olması, $v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\})$ ve $v(R \cup \{i\}) = v(R \cup \{j\})$ demektir. Dolayısıyla, $m_j^{\pi'}(N, v_O^P) = m_i^{\pi}(N, v_O^P)$ ve $m_i^{\pi'}(N, v_O^P) = m_j^{\pi}(N, v_O^P)$ olur. Uyum Değeri bütün permütasyonlar karşılık gelen marjinal katkı vektörlerinin ortalamasına eşit olması sebebiyle, bu iki olası durum $O_i(N, v, P) = 0$ eşitliğinin sağlandığını göstermektedir.

Simetrik Blok Özelliği'ne göre, iki farklı blok simetrik bloklar ise bu blokların üyeleri dağıtımdan eşit pay almalıdırlar. İki bloğun simetrik olması için ise bu blokların tüm alt kümelerinin değerleri sıfıra eşit olmalı ve her bir bloğun diğer bloğun bulunmadığı koalisyonlara marjinal katkısının sıfır olması gerekmektedir. Yani; bir $(N, v, P) \in G_n^P$ için $P_k, P_m \in P$ simetrik bloklardır eğer $v(S) = 0, \forall S \subseteq P_k; v(Q) = 0, \forall Q \subseteq P_m; v(S \cup P_k) = v(S), \forall S \not\subseteq P_m$ ve $v(Q \cup P_m) = v(Q), \forall Q \not\subseteq P_k$. Bir çözüm kavramının, $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$, Simetrik Blok Özelliği'ni sağlıyor olması için, simetrik blokların tüm oyuncularına dağıtımda eşit kazanç vermesi gerekmektedir.

Uyum Değeri'nin Simetrik Blok Özelliği'ni Sağladığının İspatı:

Herhangi bir $(N, v, P) \in G_n^P$ alım ve $P_k, P_m \in P$ simetrik bloklar olsun. Herhangi $i \in P_k$ ve $j \in P_k$ için $O_i(N, v, P) = O_j(N, v, P)$ eşitliğinin sağlandığını göstermemiz gerekmektedir. Bunun için herhangi bir permütasyon $\pi \in \Pi_N$ alalım ve genelliği kaybetmeden $\pi(j) < \pi(i)$ olsun. P_k, P_m simetrik bloklar olması sebebiyle $\pi(j) < \pi(i)$ eşitsizliği $m_j^{\pi}(N, v_O^P) = 0$ demektir. Aldığımız $\pi \in \Pi_N$ permütasyonunda, $i \in N$ oyuncusundan önce gelen oyuncuların kümesi $S = \{i' \in N: \pi(i') < \pi(i)\}$ olsun. $S \cup \{i\} \not\subseteq P_k$ veya $S \cup \{i\} \not\subseteq P_m$ ise $m_i^{\pi}(N, v_O^P) = 0$ olur. Yani $m_i^{\pi}(N, v_O^P) = m_j^{\pi}(N, v_O^P)$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $P_k \subseteq S \cup \{i\}$ ve $P_m \subseteq S \cup \{i\}$ olduğu durumu ele alalım. Bu durumda P_k ve P_m simetrik bloklar olması $m_j^{\pi}(N, v_O^P) = 0$ olmasını gerektirir. $Q = \bar{P}|_S^+ \setminus \{P_k \cup P_m\}$ olsun. Bu durumda, $v(R) = 0, \forall R \subseteq P_k$ olduğu için $m_i^{\pi}(N, v_O^P) = v(Q \cup P_m \cup P_k) - v(Q \cup P_m)$ eşitliği sağlanır. Ayrıca P_k ve P_m simetrik bloklar olması $v(Q \cup P_m) = v(Q)$ anlamına gelir ki bu durumda $m_i^{\pi}(N, v_O^P) = v(Q \cup P_m \cup P_k) - v(Q)$ eşitliği sağlanır. $\pi \in \Pi_N$ permütasyonu için, $\pi'(i) = \pi(j)$, $\pi'(j) = \pi(i)$ ve $\pi'(l) = \pi(l), \forall l \in$

$\{N \setminus \{i, j\}\}$ olacak şekilde bir $\pi' \in \Pi_N$ permütasyon yazabiliriz. P_k, P_m simetrik bloklar olması sebebiyle, $\pi' \in \Pi$ permütasyonu için $m_i^{\pi'}(N, v_O^P) = 0 = m_j^{\pi'}(N, v_O^P)$ olur. Ayrıca $m_j^{\pi'}(N, v_O^P) = v(Q \cup P_k \cup P_m) - v(Q \cup P_k)$ eşitliği sağlanır. $v(Q \cup P_k) = v(Q)$ olması sebebiyle $m_j^{\pi'}(N, v_O^P) = v(Q \cup P_m \cup P_k) - v(Q) = m_i^{\pi'}(N, v_O^P)$ olur. Uyum Değeri bütün permütasyonlara karşılık gelen marjinal katkı vektörlerinin ortalamasına eşit olması sebebiyle, bu iki olası durum $O_i(N, v, P) = O_j(N, v, P)$ eşitliğinin sağlandığı anlamına gelmektedir.

Uyum Değeri'nin, Etkinlik, Doğrusallık ve Etkisiz Oyuncu, Simetrik Oyuncu ve Simetrik Blok özelliklerini sağladığı gösterildi. Bütün bu özellikleri sağlayan yegâne çözüm kavramının Uyum Değeri olduğunun ispatı yapılırken, herhangi bir devredilebilir fayda oyununun Oybirliği Oyunları'nın (Unanimity Games) doğrusal bir kombinasyonu olarak yazılabileceği gerçeğinden faydalanılmıştır. Herhangi bir oyuncu kümesi N ve $S \in 2^N$ için Oybirliği Oyunu, $(N, u_S) \in G_N$, şöyle tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} u_S(Q) &= 1 \quad \text{eğer } Q \supseteq S \\ u_S(Q) &= 0 \quad \text{eğer } Q \not\supseteq S \end{aligned}$$

Koalisyon yapısı olan bir devredilebilir fayda oyununun, Oybirliği Oyunları'nın bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılabilmesinin ne anlama geldiği aşağıdaki basit örnekte açıklanmıştır.

Örnek:

Bir tane koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu $(N, v, P) \in G_N^P$ alalım. $N = \{1, 2, 3\}$ olsun. Karakteristik fonksiyon ise $v: 2^N \rightarrow R$ ise aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 2 \\ v(\{2\}) &= 0 \\ v(\{3\}) &= 3 \\ v(\{1, 2\}) &= 2 \\ v(\{1, 3\}) &= 5 \\ v(\{2, 3\}) &= 4 \\ v(\{1, 2, 3\}) &= 6 \end{aligned}$$

Yukarıdaki koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu $u_{\{1\}}$, $u_{\{3\}}$ ve $u_{\{2, 3\}}$ Oybirliği Oyunları'nın bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılabilir. Şöyle ki; $v(Q) = 2 \cdot u_{\{1\}}(Q) + 3 \cdot u_{\{3\}}(Q) + u_{\{2, 3\}}(Q) \quad \forall Q \in 2^N$ veya $(N, v, P) = 2 \cdot (N, u_{\{1\}}, P) + 3 \cdot (N, u_{\{3\}}, P) + (N, u_{\{2, 3\}}, P)$. Bunu görmek için

$Q = \{1\}$ alalım. $u_{\{1\}}(\{1\}) = 1$, $u_{\{3\}}(\{1\}) = 0$ ve $u_{\{2, 3\}}(\{1\}) = 0$ olmasından dolayı $v(\{1\}) = 2 = 2 \cdot u_{\{1\}}(\{1\}) + 3 \cdot u_{\{3\}}(\{1\}) + 1 \cdot u_{\{2, 3\}}(\{1\}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0$.

$Q = \{2\}$ alalım. $u_{\{1\}}(\{2\}) = 0$, $u_{\{3\}}(\{2\}) = 0$ ve $u_{\{2, 3\}}(\{2\}) = 0$ olmasından dolayı $v(\{2\}) = 0 = 2 \cdot u_{\{1\}}(\{2\}) + 3 \cdot u_{\{3\}}(\{2\}) + 1 \cdot u_{\{2, 3\}}(\{2\}) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0$.

$Q = \{3\}$ alalım. $u_{\{1\}}(\{3\}) = 0$, $u_{\{3\}}(\{3\}) = 1$ ve $u_{\{2,3\}}(\{3\}) = 0$ olmasından dolayı $v(\{3\}) = 3 = 2 \cdot u_{\{1\}}(\{3\}) + 3 \cdot u_{\{3\}}(\{3\}) + 1 \cdot u_{\{2,3\}}(\{3\}) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0$.

$Q = \{1,2\}$ alalım. $u_{\{1\}}(\{1,2\}) = 1$, $u_{\{3\}}(\{1,2\}) = 0$ ve $u_{\{2,3\}}(\{1,2\}) = 0$ olmasından dolayı $v(\{1,2\}) = 2 = 2 \cdot u_{\{1\}}(\{1,2\}) + 3 \cdot u_{\{3\}}(\{1,2\}) + 1 \cdot u_{\{2,3\}}(\{1,2\}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0$

$Q = \{1,3\}$ alalım. $u_{\{1\}}(\{1,3\}) = 1$, $u_{\{3\}}(\{1,3\}) = 1$ ve $u_{\{2,3\}}(\{1,3\}) = 0$ olmasından dolayı $v(\{1,3\}) = 5 = 2 \cdot u_{\{1\}}(\{1,3\}) + 3 \cdot u_{\{3\}}(\{1,3\}) + 1 \cdot u_{\{2,3\}}(\{1,3\}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0$

$Q = \{2,3\}$ alalım. $u_{\{1\}}(\{2,3\}) = 0$, $u_{\{3\}}(\{2,3\}) = 1$ ve $u_{\{2,3\}}(\{2,3\}) = 1$ olmasından dolayı $v(\{2,3\}) = 4 = 2 \cdot u_{\{1\}}(\{2,3\}) + 3 \cdot u_{\{3\}}(\{2,3\}) + 1 \cdot u_{\{2,3\}}(\{2,3\}) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1$

Son olarak $Q = \{1,2,3\}$ alalım. $u_{\{1\}}(\{1,2,3\}) = 1$, $u_{\{3\}}(\{1,2,3\}) = 1$ ve $u_{\{2,3\}}(\{1,2,3\}) = 1$ olmasından dolayı $v(\{1,2,3\}) = 6 = 2 \cdot u_{\{1\}}(\{1,2,3\}) + 3 \cdot u_{\{3\}}(\{1,2,3\}) + 1 \cdot u_{\{2,3\}}(\{1,2,3\}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1$

Uyum Değeri'nin aksiyomatik karakterizasyonu için, karakteristik fonksiyonu Oybirliği Oyunu olan koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyununda, Uyum Değerinin kazanç dağıtımının nasıl olacağını görmemiz gerekmektedir. Aşağıdaki iki ayrı sonuç, Uyum Değeri'nin söz konusu dağıtımların nasıl yaptığını göstermektedir.

Herhangi bir $(N, u_S, P) \in G_N^P$ için $|P|_S = 1$ ise $O_i(N, u_S, P) = \frac{1}{|S|}$, $\forall i \in S$ ve $O_i(N, u_S, P) = 0$,

$\forall i \in N \setminus S$ olduğunun ispatı:

Herhangi bir $(N, u_S, P) \in G_N^P$ alalım. Bir $P_k \in P$ için $S \subseteq P_k$ olsun. Bu oyunda her bir $i \in N \setminus S$ oyuncusu etkisiz oyuncudur. Uyum Değeri'nin Etkisiz Oyuncu Özelliği'ni sağlaması sebebiyle, $O_i(N, u_S, P) = 0 \forall i \in N \setminus S$ olur. Ayrıca $i, j \in S$ ise i ve j oyuncularını simetrik oyuncularlardır. Uyum Değeri'nin Simetrik Oyuncu ve Etkinlik özelliklerini sağlaması sebebiyle, bu durum $O_i(N, u_S, P) = \frac{1}{|S|} \forall i \in S$ olması anlamına gelir.

Herhangi bir $(N, u_S, P) \in G_N^P$ için $|P|_S > 1$ ise $O_i(N, u_S, P) = \frac{1}{|\bar{P}|_S}$, $\forall i \in \bar{P}|_S$ ve

$O_i(N, u_S, P) = 0$, $\forall i \in N \setminus \bar{P}|_S$ olduğunun ispatı:

Herhangi bir $(N, u_S, P) \in G_N^P$ alalım ve $|P|_S > 1$ olsun. Bu durumda, herhangi bir oyuncu için $i \in N \setminus \bar{P}|_S$ ise i oyuncusu etkisiz oyuncudur. Uyum Değeri'nin Etkisiz Oyuncu Özelliği'ni sağlaması sebebiyle $O_i(N, u_S, P) = 0$, $\forall i \in N \setminus \bar{P}|_S$ olur. Ayrıca iki farklı blok için $P_k, P_m \in P|_S$ ise P_k ve P_m blokları simetrik bloklardır. Uyum Değeri'nin Simetrik Blok Özelliği ve Etkinlik Özelliği'ni sağlaması sebebiyle, bu durum $O_i(N, u_S^*, P) = \frac{1}{|\bar{P}|_S} \forall i \in \bar{P}|_S$ anlamına gelir.

Uyum Değeri'nin Aksiyomatik Karakterizasyonu:

Uyum Değeri'nin Etkinlik, Doğrusallık, Etkisiz Oyuncu, Simetrik Oyuncu ve Simetrik Blok özelliklerini sağladığı gösterilmişti. Şimdi ise bütün bu özellikleri sağlayan herhangi bir çözüm kavramının yapacağı dağıtım ile Uyum Değeri'nin yapacağı dağıtımın aynı alacağını göstermemiz gerekmektedir. Bunun için herhangi bir çözüm kavramı $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ alalım ve bu çözüm kavramı bütün bu özellikleri sağlıyor olsun. Herhangi bir de $(N, v, P) \in G_n^P$ alalım. Herhangi bir koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu, Oybirliği Oyunları'nın bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılabildiği için $(N, v, P) = \sum_{S \in 2^N} \lambda_S(N, u_S, P)$, $\lambda_S \in R$ olacaktır. $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü doğrusallık özelliğini sağladığı için $\xi(N, v, P) = \sum_{S \in 2^N} \lambda_S \xi(N, u_S, P)$ olur. Dolayısıyla $\xi(N, u_S, P) = O(N, u_S, P)$, $\forall S \in 2^N$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için herhangi bir $(N, u_S, P) \in G_N^P$ alalım. İki olası durum vardır.

DURUM 1: $|P|_S| = 1$

Bu durumda, her bir $i \in N \setminus S$ oyuncusu etkisiz oyuncu olacaktır. $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü Etkisiz Oyuncu Özelliği'ni sağlaması sebebiyle $\xi_i(N, u_S, P) = 0$, $\forall i \in N \setminus S$ olur. Ayrıca $i, j \in S$ ise i ve j oyuncuları simetrik oyunculardır. $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü Simetrik Oyuncu Özelliği'ni sağlaması sebebiyle $\xi_i(N, u_S, P) = \xi_j(N, u_S, P)$, $\forall i, j \in S$ olur. $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümünün Etkinlik Özelliği'ni sağlaması $\xi_i(N, u_S, P) = \frac{1}{|S|}$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\xi_i(N, u_S, P) = O_i(N, u_S, P)$ gösterilmiş olur.

DURUM 2: $|P|_S| > 1$

Bu durumda, her bir $i \in N \setminus \bar{P}|_S$ oyuncusu etkisiz oyuncu olacaktır. $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü Etkisiz Oyuncu Özelliği'ni sağlaması sebebiyle $\xi_i(N, u_S, P) = 0$, $\forall i \in N \setminus \bar{P}|_S$ olur. Ayrıca $P_k, P_m \in P|_S$ ise P_k ve P_m blokları simetrik bloklar olacaktır. $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü Simetrik Blok Özelliği'ni sağlaması sebebiyle $\xi_i(N, u_S^*, P) = \xi_j(N, u_S^*, P)$, $\forall i, j \in \bar{P}|_S$ olur. Sonuç olarak $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümünün Etkinlik Özelliği'ni sağlaması $\xi_i(N, u_S, P) = \frac{1}{|\bar{P}|_S|}$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\xi_i(N, u_S, P) = O_i(N, u_S, P)$ olur.

Sonuç olarak, karakteristik fonksiyonu Oybirliği Oyunu olan herhangi bir kısıtlı işbirliği olan devredilebilir fayda oyununda, $(N, u_S, P) \in G_N^P$, Uyum Değeri ve $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü oyunculara aynı kazançları dağıtmaktadır. Her bir kısıtlı işbirliği olan devredilebilir fayda oyununun, Oybirliği Oyunları'nın bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılabilmesi ve Uyum Değeri'nin Doğrusallık Özelliğini sağlaması sebebiyle Uyum Değeri ile $\xi: G_N^P \rightarrow R^n$ çözümü birebir örtüşmektedir.

5. TARTIŞMA/SONUÇ

Bu projede, koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyunu verildiğinde, bir koalisyonun elde edebileceği değerin, bölüntüye bağlı olarak hesaplayan iki farklı sınırlı oyunun (restrcited game) tanımlanmış ve çözüm kavramları olarak bu sınırlı oyunların Shapley Değer'leri alınmıştır. Literatüre kazandırılan bu çözüm kavramlarına Dayanışma Değeri ve Uyum Değeri isimleri verilmiştir. Literatürde var olan ve projede önerilen çözüm kavramlarına en yakın çözüm kavramlarının Myerson Değeri (Myerson Value) ve Owen Değeri (Owen's Value) olduğu tespit edilmiştir. Myerson Değeri, kısıtlı işbirliği imkânlarının oyuncu kümesi üzerinde tanımlı bir grafik (graph) ile temsil edildiği durumlar için tanımlanmıştır. Bununla birlikte Myerson Değeri bulunurken her bir koalisyonun elde edebileceği değerin, kısıtlı işbirliğini temsil eden grafiğe bağlı olarak yeniden hesaplanması, projede önerilen çözüm kavramlarındaki yaklaşım (her bir koalisyonun değerinin bölüntüye bağlı olarak yeniden hesaplanması) ile örtüşmektedir. Owen Değeri ise, proje kapsamında literatüre kazandırılan çözüm kavramlarına benzer şekilde, işbirliği kısıtlarının oyuncu kümesi üzerinde tanımlı bir bölüntü ile temsil edildiği durumlar için ortaya atıldığı görülmüştür. Bununla birlikte projede önerilen çözüm kavramları ile Myerson Değeri ve Owen Değerinin birbirlerinden tamamen farklı sonuçlar vermekte, bütün oyuncuların işbirliği ile üretilen değeri bireysel oyunculara farklı şekillerde dağıtmaktadır.

Koalisyon yapısı olan devredilebilir fayda oyununda, kısıtlı işbirliği imkânlarını temsil eden bölüntünün her bir elemanı tek bir oyuncu içeriyorsa, yani her bir blokta sadece tek bir oyuncu var ise, Dayanışma Değeri ile Shapley Değeri aynı anlama gelmektedir. Yani Dayanışma Değeri, Shapley Değerinin bir genellemesidir. Bununla birlikte kısıtlı işbirliği imkânlarını temsil eden bölüntü tek parçalı ise, yani bütün oyuncuların yer aldığı tek bir blok mevcut ise, Shapley Değeri ve Dayanışma Değeri birbirinden farklı dağılımlar yapmaktadır. Owen Değeri de kısıtlı işbirliği imkânlarının bir bölüntü ile temsil edildiği devredilebilir fayda oyunları için tanımlanmıştır. Kısıtlı işbirliği imkânlarını temsil eden bölüntü tek parçalı ise Owen Değeri ile Shapley Değeri aynı olmakla birlikte, Dayanışma Değeri, Owen ve Shapley değerlerinden farklı olarak bütün oyunculara eşit kazanç dağıtmaktadır.

Dayanışma Değeri'ne benzer şekilde, kısıtlı işbirliği imkânlarını temsil eden bölüntüdeki her bir blokta sadece bir oyuncu olması durumunda, Uyum Değeri ile Shapley Değeri'nin aynı dağıtımı yapmaktadır. Sonuç olarak, her bir bloğun sadece tek bir oyuncudan oluştuğu durumlarda, Uyum Değeri, Dayanışma Değeri ve Shapley Değeri'nin örtüştüğü sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte, Dayanışma Değeri'nden farklı olarak, kısıtlı işbirliği imkânlarını temsil eden bölüntüde sadece bir blok var ise de Shapley Değeri ve Uyum Değeri'nin

örtüştüğü tespit edilmiştir. Bu tespitlerin ışığında Uyum Değeri'nin de Shapley Değerinin bir genellemesi olduğu anlaşılmaktadır.

Kaynakça

Algaba, E., Bilbao, J. M., Borm, P., and Lopez, J. (2001). The Myerson value for union stable structures. *Mathematical Methods of Operations Research*, 54(3), 359-371.

Algaba, E., Bilbao, J. M., Van den Brink, R., and Jimenez-Losada, A. (2003). Axiomatizations of the Shapley value for cooperative games on antimatroids. *Mathematical Methods of Operations Research*, 57(1), 49-65.

Aumann, R. J. and Dreze, J. H. (1974). Cooperative games with coalition structures. *International Journal of Game Theory*, 3(4), 217- 237.

Bilbao, J. M. (2000). Cooperative Games on Combinatorial Structures. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Bilbao, J. M., Driessen, T. S., Losada, A. J., and Lebron, E. (2001). The Shapley value for games on matroids: The static model. *Mathematical Methods of Operations Research*, 53(2), 333-348.

Bilbao, J. M. and Edelman, P. H. (2000). The Shapley value on convex geometries. *Discrete Applied Mathematics*, 103(1), 33-40.

Bilbao, J. M. and Ordonez, M. (2009). Axiomatizations of the Shapley value for games on augmenting systems. *European Journal of Operational Research*, 196(3), 1008-1014.

Koshevoy, G. and Talman, D. (2011). Solution concepts for games with general coalition structure. CentER Discussion Paper Series.

Myerson, R. B. (1977). Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research*, 2(3), 225-229.

Owen, G. (1977). Values of games with a priori unions. In R.Henn, and O. Moschlin, (eds.). *Mathematical Economics and Game Theory*, Springer Berlin, Heidelberg, pp. 76-88.

Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. In H.W. Kuhn, and A.W. Tucker, (eds.). *Contributions to the Theory of Games II*, Princeton University Press, Princeton, pp. 307-317.

Ui, T., Kojima, H., and Kajii, A. (2011). The Myerson value for complete coalition structures. *Mathematical Methods of Operations Research*, 74(3), 427-443.