



İSTANBUL MEDENİYET ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İKTİSAT ANABİLİM DALI

**Sosyal Ağlarda Davranış Benzerlikleri Üzerine
Teorik Bir İnceleme:
Ön Seçilim ve Sosyalleşme Etkileri**

Doktora Tezi

Murat Ali Çengelci

Ağustos 2024



İSTANBUL MEDENİYET ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İKTİSAT ANABİLİM DALI

**Sosyal Ağlarda Davranış Benzerlikleri Üzerine
Teorik Bir İnceleme:
Ön Seçilim ve Sosyalleşme Etkileri**

Doktora Tezi

Murat Ali Çengelci

Danışman

Prof. Dr. Hüseyin Kaya

Ağustos 2024

TEZ JÜRİSİ ONAYI

Murat Ali Çengelci tarafından hazırlanan "Sosyal Ağlarda Davranış Benzerlikleri Üzerine Teorik Bir İnceleme: Ön Seçilim ve Sosyalleşme Etkileri" başlıklı bu Doktora Tezi, İktisat Anabilim Dalı'nda hazırlanmış ve jürimiz tarafından kabul edilmiştir.

JÜRİ ÜYELERİ

İMZA

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Hüseyin Kaya
İstanbul Medeniyet Üniversitesi

Üyeler:

Prof. Dr. Murat Taşdemir
İstanbul Medeniyet Üniversitesi

Prof. Dr. Çağlar Yurtseven
Bahçeşehir Üniversitesi

Prof. Dr. S. Haluk Çitçi
Gebze Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Özer Selçuk
İstanbul Medeniyet Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 28/ Ağustos / 2024

BEYANLAR

Yazım ve Kaynak Gösterme Kılavuzu Beyanı

Danışmanlığımda yazılan bu tezin APA yazım ve kaynak gösterme kılavuzunda belirtilen kurallara uygun olarak yapılandırıldığı ve bu kılavuzun metin içi kaynak gösterme standartlarının bu tezde tutarlı olarak uygulandığı tarafımdan incelenerek teyit edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Hüseyin Kaya

Etik İlkeler Sadakat Beyanı

Hazırladığım bu tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu, akademik ve etik kuralları gözeterek çalıştığımı ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi beyan ederim.

İmza

Murat Ali Çengelci

ÖZET

Sosyal Ağlarda Davranış Benzerlikleri Üzerine Teorik Bir İnceleme: Ön Seçilim ve Sosyalleşme

Çengelci, Murat Ali

Doktora Tezi, İktisat Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin Kaya

Ağustos 2024

Bu tez arkadaşlık ağları ve risk paylaşım ağlarıyla ilgilidir. Arkadaşlık ağlarında, bireyler kararlar aldıklarında veya davranışları seçtiklerinde, arkadaşlarının kararlarından veya davranışlarından etkilenirler. Buna karşılık, bireyler genellikle arkadaşlarını bu kararlardaki ve davranışlardaki benzerliklere göre seçerler. Kandel (1978), bu iki etkinin arkadaşlık ağlarında mevcut olduğuna dair ampirik kanıtlar sunar ve bunlara sırasıyla sosyalleşme ve ön seçim olarak adlandırır. 2. bölüm, bireylerin arkadaşlarını benzerliğe göre seçtiklerinde ortaya çıkan sosyal ağ yapısı ve bireylerin kararlarının arkadaşlarının kararlarından nasıl etkilendiğiyle ilgilenir. Bireylerin, hiçbir arkadaşı olmadığında (sosyalleşme etkilerinden bağımsız olduklarında) eylemlerini veya davranışlarını belirleyen farklı tiplere sahip olduğu varsayılır. İlk başta, tüm bireyler arkadaşlarını seçerek bir sosyal ağ oluştururlar. Daha sonra, eylem veya davranışlarını hem kendi tipleriyle hem de sosyal ağdaki arkadaşlarının eylemleriyle koordine ederek bir eylem veya davranış seçerler. Sosyal Ağ oyununda, bireylerin eylemlerini seçtiği ve herhangi bir bireyin denge eyleminin kendi tipinin ve arkadaşlarının denge eylemlerinin ağırlıklı ortalaması olduğu tek Nash dengesi olduğu gösterilmiştir. Bireyler, sosyal ağ oyununda tek Nash dengesi altında koordinasyon avantajlarını tahmin ederek arkadaşlarını seçerler. Belirli sosyal ağ sınıflarının ikili kararlı ağlar olarak ortaya çıktığı gösterilmiştir. Tüm ikili kararlı ağlarda, bireyler daha yüksek koordinasyon avantajları sağladığı için tipler açısından en çok benzer olanlarla arkadaşılır.

Bölüm 3, topluluklar arasındaki bireylerin bağlantılar kurduğu ve elde ettikleri geliri ağdaki arkadaşlarıyla bir araya getirip paylaşarak gelir riskini azalttığı verimli ve ikili kararlı ağların yapısıyla ilgilenir. Bölüm 3'te dinamik ağ oluşum süreci de ele alınır. İki toplulukta aynı sayıda bireyin bulunduğu ve bağlantıları sürdürmenin maliyetli olduğu (topluluklar arasındaysa daha maliyetli) varsayılır. Bağlantı maliyetlerinin belirli değerleri için verimli, ikili kararlı ve dinamik süreç sonucu oluşan dinamik kararlı olmak üzere iki tür sosyal ağ olduğu gösterilir. Toplulukların gelirleri arasında tam negatif korelasyon olduğunda bireyler tam sigortaya erişir ve korelasyon arttıkça bireyler yalnızca kısmi sigortaya ulaşabilir ve boş ağın verimli, ikili kararlı ve dinamik kararlı olma olasılığı daha yüksektir. Son olarak, toplulukların popülasyonlarının farklı

olmasına verdiğimizde yüksek nüfuslu topluluklardaki ek bireyler tüm ikili kararlı ağlarda sigortaya erişemezken, verimli ağlarda tüm bireyler kısmi sigortaya ulaştığı gösterilir.

Anahtar Kelimeler: Sosyal ağlar, sosyalleşme, n seçilim, risk paylaşım ağları

ABSTRACT

A Theoretical Investigation of Behavioral Similarities in Social Networks: Selection and Socialization

Çengelci, Murat Ali

Ph. D. Thesis, Department of Economics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin Kaya

Agust 2024

This thesis concerns friendship networks and risk sharing networks. In friendship networks, when individuals make decisions or choose behaviours, they are affected by the decisions or behaviours of their friends. In turn, individuals often choose their friend based on similarities in these decisions and behaviours. Kandell (1978) provide empirical evidence that these aspects are present in friendship networks and refers them as socialization and selection, respectively. Chapter 2 concerns with structure of network that emerges when agents choose their friends based on similarity and how agents' decisions are affected by decisions of their friends. Agents are assumed to have different types that determine their actions or behaviours when they have no friends. At first, all agents choose their friends which establish a network. Then, they choose an action or behaviour by coordinating their action or behaviour both with their type and actions of friends in the network. It is shown that there is a unique Nash equilibrium in network game where agents choose their actions and that the equilibrium action of any agent is weighted average of his own type and equilibrium actions of his friends. Agents choose their friends by anticipating their coordination benefits under unique Nash equilibrium in network game. Certain class of networks is shown to emerges as pairwise stable networks. In all pairwise stable networks, agents are friends with those who are most similar in terms of types since it provides higher coordination benefits.

Chapter 3 concerns with structure of efficient and pairwise stable networks when agents across communities establish links and mitigate income risk by pooling and sharing their realized income with their friends in the network. A dynamic network formation process is also considered in Chapter 3. It is assumed that there are same number of agents are located in two communities and it is costly to maintain links (more costly if it is between communities). It is shown that there are two types of networks that are efficient, pairwise stable and dynamically stable which is outcome of dynamic process, for certain values of costs of links. Agents attain full insurance when there is perfect negative correlation between incomes of different communities and as correlation increases, agents can only attain partial insurance and empty network is more likely to be efficient, pairwise stable and dynamically stable. Finally, populations of communities are allowed

to be different and it is shown that additional agents in high population community have no insurance in all pairwise stable networks but there are efficient networks in which all agents attain partial insurance.

Keywords: Social Networks, Selection, Socialization, Risk Sharing Networks

İçindekiler

1 Giriş	1
2 Ön Seçilim, Sosyalleşme ve Kararlı Ağlar	5
2.1 Sosyal Ağlar	8
2.1.1 Patika, Bileşen ve Klik	9
2.1.2 Bonacich-Katz Merkezilik Ölçüsü	11
2.2 Sosyalleşme: Ağ Oyunu	15
2.3 Ön Seçilim: Ağ Oluşumu	18
2.3.1 İkili Kararlı Ağların Varlığı	20
2.3.2 İkili Kararlı Ağların Kısmi Karakterizasyonu	21
2.3.3 $n = 5$ için İkili Kararlı Ağlar	23
3 Topluluklar Arası Risk Paylaşımı Ağları	28
3.1 Model	34
3.1.1 Ağlar	34
3.1.2 Patika ve Bileşen	35
3.1.3 Risk Paylaşım Mekanizması	38
3.2 Verimli Ağlar	41
3.3 İkili Kararlı Ağlar	45
3.4 Dinamik Ağ Oluşumu	51
3.5 Farklı Korelasyonlar Altında Risk Paylaşım Ağları	53
3.6 Toplam Risk Altında Risk Paylaşım Ağları	56
3.6.1 Toplam Risk Altında İkili Kararlı Ağlar	57
3.6.2 Toplam Risk Altında Verimli Ağlar	60
4 Sonuç	64
Kaynakça	72
Ekler A. Sosyalleşme, Ön Seçilim ve Kararlı Ağlar	73

Ekler B. Topluluklar Arası Risk Paylaşım Ağları	81
---	----

Tablo Listesi

1	Farklı Toplulukların Gerçekleşen Gelirlerin Koşullu Olasılıkları	53
2	Farklı Korelasyonlar Altında Risk Paylaşımı Sonrası Gelirler	54

Şekil Listesi

1	Bileşen ve Max-klik	11
2	Krackhardt Uçurtma Ağı	13
3	Bonacich-Katz Merkezîyet Ölçüsü	14
4	$n = 5$ iken İkili Kararlı Ağlar	24
5	$n = 5$ iken İkili Kararlı Ağların Parametre Değerleri	26
6	Bileşenleri $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{4, 6, 7, 8\}$ Olan Bir Ağ	35
7	Asgari Bağlı Bileşenler	36
8	Asgari Bağlı Bileşenlerin Ağaç Şeması Gösterimi	37
9	Risk Paylaşım Ağlarında Farklı Maliyet Değerleri için Verimli Ağlar . .	43
10	Farklı Korelasyonlar Altında Verimli Ağlar	55
11	Tam Risk Altında Farklı Maliyetler için Verimli Ağlar	62
12	Dengesiz Bileşeni Biri Dengeli İki Bileşene Bölmek	86
13	Dengesiz Karmaşık Bileşeni Bölmek	87

1 Giriş

Sosyal ağ, bireyler, örgütler veya hatta ülkeler gibi sosyal aktörler arasındaki ilişkilerin ve etkileşimlerin tanımıdır. Sosyal aktörler arasındaki ilişki örnekleri arasında akrabalık¹, komşuluk, arkadaşlık, işveren-çalışan ilişkileri, profesyonel iş birliği, evlilikler ve etkileşim örnekleri arasında iş fırsatlarının iletilmesi, bilgi akışı, finansal kuruluşlar arasında borç alma ve verme, ülkeler arasındaki uluslararası ticaret bulunur. Liste uzatılabilse de, birçok sosyal ağın ortak bir özelliği, sosyal aktörlerin hangi ilişkiyi kuracakları, sürdürecekleri veya sonlandıracakları ve ilişki için ne kadar çaba sarf etmek istedikleri konusunda karar yetkisine sahip olmalarıdır. Örneğin, araştırmacılar arasındaki iş birliğini ele alalım; burada araştırmacı, sinerjiler nedeniyle bir araştırma projesine katılma konusunda teşvike sahiptir ancak bu araştırmacının dahil olduğu diğer projelere ayırdığı zamanı azaltır. Ayrıca, iş birliği ağının yapısı araştırmacının üretkenliği veya genel araştırma miktarı üzerinde etkilere sahip olabilir.

Genel olarak, sosyal ağlar üzerine yapılan çalışmaların ilgilendiği iki ana soru vardır. İlk soru, bireylerin ilişki kurma veya sonlandırma kararlarını diğer bireylerle ilişkilerine ilişkin tercihlerine göre veya ilişkilerin fayda ve maliyet analizine göre aldıklarında ortaya hangi sosyal ağ yapıları ortaya çıkar? İkinci soru, belirli bir sosyal ağın yapısının etkileriyle ilgilidir: Belirli bir sosyal ağ yapısı bireylerin davranışlarını ve kararlarını nasıl etkiler veya belirli bir sosyal ağ yapısının sosyal refah üzerindeki etkileri nelerdir? Bu iki sorudan yalnızca biriyle ilgilenen önemli sayıda çalışma vardır. Ağ Oluşumu literatürü, sosyal ağların nasıl oluştuğuna ve bireylerin ilişki kurma ve sonlandırma konusunda kararlar verdiğinde hangi yapıda sosyal ağlar görmeyi beklediğimize odaklanır. Ağ Oyunları literatürü ise belirli bir sosyal ağ yapısının bireylerin kararlarını, eylemlerini ve sosyal refahı nasıl etkilediğine odaklanırken oluşmasını beklediğimiz ağ yapısı konusunda sessiz kalır. Öte yandan, ağ oluşumunu ve ağ oyunlarını birleştiren bazı çalışmalar da vardır; burada bireyler hem ilişkileri hem de eylemleri hakkında kararlar alırlar ve bu kararlar birbirine bağlıdır. Bu tezde, yukarıda bahsettiğimiz ilişkiler ve eylemler hakkındaki kararlar arasındaki karşılıklı bağımlılıklara ışık tutmaya çalıştığımız arkadaşlık ağları ve risk paylaşım ağları olmak üzere iki farklı model inceliyoruz. Kısaca, arkadaşlık ağları modelinde, bir bireyin arkadaşları hakkındaki kararının arkadaşlarıyla eylemlerinin

¹Sosyal aktörler akrabalık ilişkileri üzerinde karar yetkisine sahip olmayabilir.

koordinasyonuna bağılı olduğu durumlarda ortaya çıkan ağ yapısını inceliyoruz. Risk paylaşım ağları modelinde ise bireylerin bir ilişkiyi kurmayı veya sonlandırmayı ilişkinin maliyetine ve faydasına göre seçtiği durumlarda ortaya çıkan sosyal ağların yapısını inceliyoruz. İlişkilerin faydası, ağda birbirine bağılı bireyler arasındaki gelir paylaşımı yoluyla gelir riskini azaltmak, ilişkinin maliyeti ise ilişkiyi kurmanın ve sürdürmenin maliyetidir. Yukarıdaki ikinci soruyla ilgili olarak, arkadaşlık ağlarında, bireyin belirli bir eylem hakkındaki kararının, ağdaki arkadaşlarının eylemlerinden ve sosyal ağdaki pozisyonundan nasıl etkilendiğini inceliyoruz. Risk paylaşım ağlarında ise bireylerin ortaya çıkan ağ aracılığıyla gelir riskini azaltarak elde edebilecekleri sigorta seviyesini inceliyoruz.

2. bölümde arkadaşlık ağlarını inceliyoruz. Ampirik çalışmalar birçok arkadaşlık ağında birbirleriyle bağlantılı olan bireylerin genellikle bağılı olmayanlara kıyasla özellik ve davranışlarda daha fazla benzerlik gösterdiğini göstermektedir. Arkadaşlık ağlarında bu özellik homofili olarak adlandırılır². Kandel (1978) belirli bir ağda ve zamanda gözlemlenen homofili düzeyini açıklamak için iki süreç önermiştir: Ön Seçilim ve Sosyalleşme. Ön Seçilim, belirli özelliklerde veya kararlarda benzer olan bireylerin birbirlerini kasıtlı olarak arkadaş olarak seçmesini ifade eder. Öte yandan, Sosyalleşme, bireyler arkadaş olduklarında belirli özelliklerde veya kararlarda benzer olmasalar bile arkadaşların birbirleri üzerindeki etkisi ile zamanla benzerlikleri artmasını ifade eder. Bir başka deyişle, ön seçim süreci, bireylerin arkadaşlarını benzerliklere göre seçtiklerinden dolayı ağ yapısının homofili sergilediğini belirtir ve ön seçim süreci daha önce bahsettiğimiz iki genel sorudan ilkiyle ilişkilidir. Ancak sosyalleşme, ağ yapısının bireylerin özellikleri üzerindeki etkisine odaklanır ve ikinci soruyla ilişkilidir. 2. bölümde Kandel (1978) tarafından önerilen iki sürecin mevcut olduğu bir arkadaşlık ağında, ağ oluşumu ve ağ oyunları modellerini birleştiren bir model inceleyeceğiz.

Bölüm 2'deki arkadaşlık ağları modelinde, bireyler önce arkadaşlarına karar verirler ve sonra belirli bir davranış veya eylem seçerler. Bireylerin farklı tiplere sahip olduğu varsayılır; bunlar, hiç arkadaşları yokken bireylerin seçtiği davranışlar veya eylemlerdir. Ancak arkadaşları varken, bireyler eylemlerini hem arkadaşlarının eylemleriyle hem de kendi tipleriyle koordine ederek seçerler. Bir bireyin eylemiyle ilgili kararı yalnızca arkadaşlarının eylemlerinden değil, aynı zamanda arkadaşlarının arkadaşlarının eylemlerinden, arkadaşlarının arkadaşlarının arkadaşlarının eylemlerinden vb. etkilenir. Bir bireyin eylem seçimindeki bu dolaylı etkilere geri bildirim etkileri denir. Herhangi bir ağda, hiçbir bireyin eylemini tek taraflı olarak

²Geniş bir etüt için bkz. McPherson, Smith-Lovin, ve Cook (2001).

değiştirmeye teşvikinin olmadığı tek bir Nash dengesi olduğunu ve denge eylemlerinin geri bildirim etkilerini içerdiğini gösteriyoruz. Nash dengesi ve buna bağlı fayda fonksiyonu, bireylerin farklı ağ yapılarını karşılaştırmasına olanak tanır ve bu fayda değeri bireylerin arkadaşlık kararlarını stratejik olarak vermelerine olanak sağlar. İki birey arasındaki bir ilişki her iki birey için de faydalıysa kurulur. Bir birey ise kendisi için faydalıysa mevcut bir ilişkiyi tek taraflı olarak sonlandırabilir. Bir ilişki kurmak, ilişkiye dahil olan iki bireyin rızasını gerektirirken bir birey tek taraflı olarak bir ilişkiyi sonlandırabilir. Arkadaşlık ilişkilerinin bu özelliği ikili kararlı denge kavramı tarafından temsil edilir. İkili kararlı bir ağda, iki bireyin yeni bir ilişki kurmaları ve herhangi bir bireyin bir ilişkiyi sonlandırması bu bireylerin faydalarını arttırmaz. İkili kararlı ağların yapısının, bireylerin kendilerine en çok benzeyenlerle arkadaş olması şeklinde olduğunu gösteriyoruz.

Bölüm 3'te, bireylerin gelir belirsizliğiyle karşı karşıya olduğu ve gerçekleşen gelirlerini sosyal ağdaki arkadaşlarıyla bir araya getirip paylaşarak gelir riskini azalttıkları bir ortamı ele alıyoruz. Özellikle, farklı topluluklardan aynı sayıda bireylerin farklı gerçekleşen gelirlerle karşı karşıya olduğu iki topluluk veya köy arasındaki risk paylaşımını inceliyoruz. Bireyler arkadaşlarını ilişkilerin maliyet ve faydalarına göre seçtiklerini varsayıyoruz. Risk paylaşım ağındaki bir arkadaşın faydası, ağ üzerinden gelir birleştirme ve paylaşma sonrasında gerçekleşen gelirdeki dalgalanmaların azalması ve risk paylaşım ağlarındaki bir ilişkinin maliyeti ise bu ilişkiyi kurmak ve sürdürmek için katlandıkları maliyettir. Farklı topluluklardan bireyler arasındaki bağlantıların maliyetinin aynı topluluk içindeki bağlantılardan daha yüksek olduğu varsayıyoruz.

Öncelikle, toplumsal refahı maksimize eden verimli ağları ele alıyoruz. Bağlantı maliyetlerine bağlı olarak verimli ağ olarak ortaya çıkan üç tür ağ olduğunu gösteriyoruz. Daha sonra, ikili kararlı ağları ele alıyoruz. Üç tür verimli ağın, farklı bağlantı maliyeti aralıkları için de ikili kararlı olduğunu ve ayrıca verimli ağlardan farklı ikili kararlı ağların da olduğunu gösteriyoruz. İkili kararlı ağlar, yeni ilişkilerin kurulmayacağı ve mevcut ilişkilerin sonlandırılmayacağı anlamında kararlı olsa da, bir toplumun sürekli olarak yeni ilişkiler kurduğu veya mevcut ilişkileri sonlandırdığı dinamik bir süreç sonunda ikili kararlı bir ağa ulaşip ulaşmadığı sorusu sorulabilir. Bu nedenle, hiçbir ilişkinin olmadığı boş bir ağdan başlayan dinamik bir ağ oluşturma sürecini de ele alıyoruz. Bireyler, süreç ikili kararlı bir ağa ulaşana kadar sürekli olarak yeni ilişkiler kurar veya var olan ilişkilerini sonlandırır. Bu ağları dinamik kararlı ağlar olarak adlandırıyoruz. Genel olarak dinamik kararlı ağlar kümesi ikili kararlı ağlar kümesinin bir alt kümesidir. Bizim modelimizde de üç tür verimli ağdan

yalnızca ikisinin dinamik kararlı olduğunu gösterdik.

Risk paylaşım ağında, bireylerin risk paylaşımından sonra gerçekleşen gelirlerini belirsizliği ortadan kaldırması olarak tanımlanan tam sigortaya ulaşamayacakları önemli bir sorudur. Farklı topluluklar arasındaki gerçekleşen gelirlerin korelasyonu tamamen negatif olduğunda, bireyler boş ağ hariç olmak üzere verimli ağlarda tam sigortaya ulaşabilirler. Korelasyon arttıkça, tam sigortaya erişmek mümkün değilken bireyler kısmi sigortaya erişebilirler. Aynı zamanda boş ağın verimli, ikili kararlı ve dinamik kararlı olma olasılığı daha yüksektir. Son olarak, farklı topluluklarda aynı nüfus varsayımını, bir toplulukta diğerine göre daha fazla birey olduğunu varsayarak gevşettik ve tüm ikili kararlı ağlarda, ek bireylerin risk paylaşım ağlarının dışında bırakıldığını ve gelir riskine karşı herhangi bir sigortaya sahip olamayacaklarını gösterdik. Ancak, verimli ağlarda, ek bireyler dahil olmak üzere her iki topluluktan tüm bireyleri içeren verimli ağlar mümkündür.

Tezin bölümleri şu şekildedir: 2. Bölümde, ön seçim, sosyalleşme ve ikili kararlı ağları inceliyoruz. 3. Bölümde, toplumlar arası risk paylaşım ağlarını inceliyoruz. 4. Bölümde ise sonuçları özetliyoruz.

2 Ön Seçim, Sosyalleşme ve Kararlı Ağlar

Sosyal ağlar aracılığıyla birbirine bağlı olan bireyler birbirlerinin kararlarını ve davranışlarını etkiler¹ ve buna karşılık bireysel özellikler hangi bireylerle bağlantı kurmayı seçtiğimizi belirler². Başka bir deyişle, bireysel özellikler sosyal ilişkilerin temelini oluşturur ve bu sosyal bağların doğası bu özellikleri sosyal etki ve akran etkileri yoluyla değiştirir. Kandel (1978) homofili özelliği gösteren arkadaşlık ağları için bu karşılıklı etkiler hakkında kanıtlar sunar³. Homofili, birbirleriyle ilişki kuran bireylerin davranışlarında ve kişisel özelliklerinde gözlemlenen benzerlikleri ifade eder. Kandel (1978)'e göre, belirli bir zamanda ve belirli bir ağda gözlemlenen homofili düzeyi iki süreçle açıklanabilir: Bazı davranış veya özelliklerdeki benzerliklere dayalı olarak birey çiftlerinin bilinçli bir şekilde arkadaşlık kurmasına yol açan *Ön Seçim* ve kendi davranışları ile arkadaşlarının davranışları arasındaki uyumsuzluğu azaltmak için davranışlarda ayarlamalara yol açan *Sosyalleşme*. Kandel (1978) ergenlik çağındaki gençlerin arkadaş seçimlerini ve davranışlarını (örneğin esrar kullanma sıklığı veya suç faaliyetlerine katılım) arkadaşları arasındaki davranışlardaki uyumu en üst düzeye çıkarmak için koordine ettiklerini ve herhangi bir uyumsuzluk durumunda gençlerin ya arkadaşlığı bitirdiğini ya da kendi davranışını arkadaşının davranışına uyacak şekilde güncellediğini göstermektedir.

Bu bölümde, hem ön seçim hem de sosyalleşme özelliklerini sergileyen bir arkadaşlık ağı modelini ele alacağız. Sosyalleşme etkilerini incelemek için, bir sosyal ağ aracılığıyla birbirine bağlı sonlu sayıda birey olduğunu varsayıyoruz. Bireylerin, belirli bir davranışa eğilim olarak yorumlanan tipleri vardır. Bireyler, daha sonra, her bir sosyal ağ ve arkadaşlarının eylemleri için kendi tiplerinden farklı olabilecek bir eylem seçerler. Tiplere ve eylemlere örnek olarak ebeveynlerin eğitim seviyesi ve bir gencin eğitim durumu, bir bireyin mahallesindeki veya aile üyelerindeki suç seviyesi

¹Sosyal ağların yapılarının etkilediği karar ve davranışlarına örnek olarak satın alınan ürün tercihi için bkz. Dubey, Garg, ve Meyer (2012), öğrenme için bkz. Golub ve Jackson (2012a), Golub ve Jackson (2012b), Golub ve Jackson (2010), suç kapsamında faaliyetler için bkz. Glaeser, Sacerdote, ve Scheinkman (1996), siyasi katılım için bkz. Knoke (1990), eğitim düzeyin için bkz. Cohen (1977), Patacchini, Rainone, ve Zenou (2011), Calvó-Armengol, Patacchini, ve Zenou (2009) ve uyuşturucu kullanımı için bkz. McCabe vd. (2005).

²Örneğin, bireyler karşılıklı yarara dayalı bir ilişkiyi kurmaya, sürdürmeye ve sonlandırmaya karar verirler veya bu kararı çeşitli ağlardan (ticaret ilişkileri, profesyonel işbirlikleri, siyasi ittifaklar gibi) kaynaklı maliyet hesabına göre verirler. Bir diğer ihtimal ise bireyler yalnızca ilişkili oldukları kişilerle belirli özelliklerde benzerlikler ararlar.

³Bir terim olarak Lazarsfeld ve Merton (1954) tarafından önerilen Homofili hakkındaki ampirik kanıtlara ilişkin kapsamlı bir inceleme için bkz. McPherson vd. (2001).

ve bireyin dahil olduğu suç faaliyetleri seviyesi verilebilir. Bir eylem seçerken, bireyler yalnızca kendi eylemleri ile arkadaşlarının eylemleri arasındaki farkı değil aynı zaman da kendi eylemleri ile tipleri arasındaki farkı en aza indirmek isterler. Bir bireyin faydası, aynı fonksiyonel form kullanılarak ölçülen ve yukarıda bahsedilen farklar olmadığında 1 değerine normalize edilen koordinasyon faydalarının ağırlıklı toplamıdır. Koordinasyon faydaları, yukarıda belirtilen farklar arttıkça ikinci dereceden azalır ve tolerans oranı adını verdiğimiz bir parametre, koordinasyon faydalarındaki azalmaların büyüklüğünü belirler. Bir başka deyişle, sosyal ağ yapısı bireylerin arasındaki stratejik etkileşimi belirler. Bu nedenle, Sosyal Ağ Oyunları⁴ sosyalleşme sonucu ortaya çıkan bu stratejik etkileşimleri incelemek için doğal bir yöntem olarak ortaya çıkar. Bir sosyal ağ oyununda, bir bireyin faydası, olası geri bildirim etkileri nedeniyle arkadaşlarının eylemlerine ve genel ağ yapısına bağlıdır. Bu bölümde ele alacağımız modelin sosyalleşme kısmıyla yakından ilişkili olan etkili bir makale, bireylerin arkadaşlarının çaba seviyeleri ile kendi çaba seviyeleri arasında stratejik tamamlayıcılık gösteren doğrusal ikinci dereceden fayda fonksiyonunun olduğu varsayılan Ballester, Calvó-Armengol, ve Zenou (2006)⁵ makalesidir. Eylemlerdeki stratejik tamamlayıcılık harcanan çabaların maliyeti ve faydasına kıyasla küçük olduğunda tek bir Nash Dengesi olduğunu gösterirler. Ayrıca, bir bireyin Nash Dengesindeki eyleminin, altta yatan ağdaki geri bildirim etkilerini somutlaştıran Bonacich-Katz merkezîyet ölçüsüne orantılı olduğunu gösterirler⁶. Bireyler gözlemlenebilir özellikler açısından homojendir ancak bir dipnotta bireylerin heterojen olması halinde sonuçlarının nasıl değiştiği hakkında yorum yaparlar. Ancak, bireyler arasındaki heterojenlik, fayda fonksiyonundaki bireylerin ağdaki konumları gereği ortaya çıkan geri bildirim etkilerinden bağımsız bireylerin harcanan

⁴Sosyal Ağ Oyunları literatürde kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Ağ Oyunları hakkında detaylı bir inceleme için bkz. Jackson ve Zenou (2012). Stratejik etkileşimin doğasına bağlı olarak eylemlerin stratejik tamamlayıcı veya ikame olduğu iki sınıf ağ oyunu vardır. Eylemlerin stratejik ikame olduğu ağ oyunlarına örnek olarak yerel kamu malı sağlama için (bkz. Bramoullé ve Kranton (2007a)) ve maliyetli bilgi toplama ve paylaşma verilebilir. Eylemlerin Stratejik tamamlayıcı olduğu ağ oyunlarına örnek olarak yeni teknolojilerin benimsenmesi (bkz. Morris (2000)), eğitim kararları ve suç içeren faaliyetler verilebilir. Eylemlerin karma stratejik etkileşimli olduğu ağ oyuna örnek olarak Ar-Ge ve rekabeti analiz eden Goyal ve Moraga-González (2001)'ye bakınız.

⁵Bu makaledeki modele dayalı çeşitli makaleler var. Örneğin, Helsley ve Zenou (2011) Nash Dengesinin verimli olmadığını gösterir. Calvó-Armengol ve Zenou (2004) ve Ballester, Zenou, ve Calvó-Armengol (2010), bir suç ağındaki merkezi suçluyu seçme konusunda bir politika önerisi sunuyor, böylece o suçlunun ortadan kaldırılması genel suç faaliyetini en çok azaltılması amaçlanıyor. Modelin Eğitim ile ilgili konulara uyarlandığı örnekler için Calvó-Armengol vd. (2009) ve Ballester, Calvó-Armengol, ve Zenou (2011)'ye, rekabet eden firmalar arasındaki Ar-Ge ortaklıkları için Koenig, Liu, ve Zenou (2012)'e bakınız.

⁶Bonacich-Katz merkezîyet ölçüsünün detayları için bu bölümdeki 2.1.2 kısmına bakınız.

çabanın fayda ve maliyet değerlendirmesini etkileyen bir parametre cinsindendir⁷. Ancak, bizim kurduğumuz modelde, bireyler arasındaki heterojenlik, bir bireyin tipi ve eyleminin anlamlı karşılaştırmalarına izin veren, bireylerin içsel özellikleri olarak modellenmiştir. Özellikle, bir bireyin eylemi, bir ağın yokluğunda kendi tipine eşittir ve eylemi ancak sosyalleşme nedeniyle tipinden farklılık gösterir. Modelimizde, Nash Dengesindeki eylemler, Bonacich-Katz merkezilik ölçüsünün ağırlıklı bir ortalamasıdır ve bireyin tipinden farklı bir eylem seçmek maliyetli olduğu sürece Nash Dengesi tektir.

Ön Seçilim, arkadaşlık ağlarındaki bireylerin arkadaşlarını davranışlardaki benzerliklere göre seçtiğini belirtir. Arkadaşlık ilişkileri karşılıklıdır, yani, bir bağlantı oluşturmak bağlantıda yer alan her iki bireyin de onayını gerektirir, ancak bir birey diğerinin onayı olmadan arkadaşlığını sonlandırabilir. İkili kararlılık, arkadaşlık ilişkilerindeki bu karşılıklılığı yansıtır. Hiçbir bireyin var olan bir ilişkiyi sonlandırmak istemediği ve her hangi iki bireyin yeni bir bağlantı oluşturmak istemediği sosyal ağlar ikili kararlı ağlar olarak adlandırılır. Sosyal ağ oyununun Nash Dengesi tek olduğundan, bir sosyal ağın faydasını, o ağ oyununun denge eylemleri altında bireyin faydasına eşit olduğunu varsayıyoruz. Bu, bireylerin farklı ağlar altındaki faydaları karşılaştırarak bir bağlantıyı sonlandırmaya veya yeni bir bağlantı eklemeye karar vermesini sağlar. Stratejik ağ oluşturma modelleri genellikle bir bireyin bir ağdan elde ettiği faydayı, bu faydaların nereden türetildiği konusunda bir açıklama yapmadan kurulan modellerin dışından bazı varsayımlarla kurgular⁸. Ancak, bizim modelimizde, bir bireyin her hangi bir ağdan elde ettiği fayda, o ağda bireyin eylemlerini koordine ettiği ağ oyunundaki faydaya eşit olduğu varsayılmıştır. Tolerans oranı yeterince küçük olduğunda boş ağın ikili kararlı olduğunu gösteriyoruz. Tolerans oranının diğer değerleri için, ağ yapısının bir bireyin eylemi üzerindeki geri bildirim etkileri nedeniyle ikili kararlı ağlar bulmak oldukça karmaşık hale gelir. Ancak, iki sınıf ağın ikili kararlı olduğunu gösteriyoruz. Birinci sınıf ağlara, diyadik ağlar diyoruz, tipleri birbirine en yakın olan en fazla iki birey içeren bileşenlere

⁷Ampirik çalışmalarda, bireyler arası heterojenlik, bir bireyin arkadaşlarının özelliklerinin ortalamasını içerir. Eğitim ağları üzerine bir çalışma için Calvó-Armengol vd. (2009)'e ve suç ağları için Patacchini ve Zenou (2012)'ye bakınız.

⁸Örneğin, Bloch ve Jackson (2007), bireylerin arkadaşlıktan sabit bir fayda elde ettiğini ve bunun sosyal ağdaki mesafeyle azaldığını ve bireylerin doğrudan arkadaşlarıyla bir ilişki sürdürmek için sabit bir maliyetine katlandığını varsayar. Ancak bu faydaları ve maliyetleri belirleyen temel bir süreç veya mekanizma yoktur. Farklı maliyet ve fayda değerleri için ikili kararlı ağlar gösterirler. Jackson ve Wolinsky (1996), bağlantılardan kaynaklanan negatif dışsallıkları inceler. Farklı projelere katılmayı seçen kısıtlı zamanları olan bireylerin kararlarını inceler. Bireyler bir projeye daha fazla zaman harcadıkça sinerji oluşur. Sinerjiler, bireyler tarafından ayrılan zamanlarla orantılıdır. Bu, negatif dışsallıklara yol açar ve ikili kararlı ağların farklı büyüklükteki bileşenlerden oluştuğunu gösterirler.

sahiptir. İkinci sınıf ağ, bir bileşende tipleri birbirine en yakın olan üç birey içerebilir.

Sosyal ağların her iki yönü de literatürde ayrı ayrı incelenmiştir. Sosyalleşme etkilerini çalışmak için Ağ Oyunları ve Ön Seçim etkilerini çalışmak için Stratejik Ağ Oluşum modelleri her bir konu hakkında kullanışlı bir teorik zemin sunar. Bununla birlikte, olası karşılıklı bağımlılıklar veya iki süreç aynı anda etkin olduğunda ne tür ağ yapılarının ortaya çıkabileceği konusunda sessiz kalırlar. Bu iki literatürü birleştirilmiş bir çerçevede bir araya getirmek için çok az girişim vardır. Koenig, Tessone, ve Zenou (2011) her iki literatürü birleştiren ve bizim modelimize en yakın olan çalışmadır. Bizim modelimizle esas fark ise bireyler arasındaki farklılıkları ele alış biçimleridir. Koenig vd. (2011) modellerini Ballester vd. (2006) üzerine kurdukları için bireyler arası farklılıklar sadece bireylerin sosyal ağdaki pozisyonlarından kaynaklanır ve bireylerin önceden var olan kişisel özelliklerine dayalı bir farklılaşmayı değerlendirmezler. Bizim kurduğumuz modelde ise bireyler sosyal ağdan bağımsız olarak birbirlerinden farklıdır ve bunu bireylerin farklı tiplere sahip olduğunu varsayarak yapıyoruz. Ayrıca bu farklılıklar bireylerin hem sosyal ağ oyunundaki kararlarını hem de ağ oluşumundaki kararlarını etkiler. Koenig vd. (2011) boş ağdan başlayan dinamik bir ağ oluşum sürecini⁹ ele alırken, biz arkadaşlık ağlarının karşılıklılık özelliğini yansıtan ve statik bir denge kavramı olan ikili kararlı ağları ele alıyoruz.

2.1. kısımda, sosyal ağlar ve Bonacich-Katz merkezilik ölçüsünü tanımlıyoruz. 2.2. kısımda, sosyalleşmeyi bir ağ oyunu olarak modelliyoruz ve oyunun Nash Dengesini 2.1.2 kısımda tanımlanan genelleştirilmiş Bonacich-Katz merkezilik ölçüsünün bir fonksiyonu olduğunu gösteriyoruz. 2.3 kısımda da, modelin çeşitli parametre değerleri için ikili kararlı ağları gösteriyoruz. Tüm ispatlar ekte yer almaktadır.

2.1 Sosyal Ağlar

Bu bölüm boyunca bireylerin kümesini gösteren $N = \{1, \dots, n\}$ kümesi için n 'in sabit olduğunu varsayacağız ve sosyal ağı 0 ve 1 değerlerini alan $n \times n$ bir matris olan $\mathbf{g} \in \{0, 1\}^{n \times n}$ ile göstereceğiz. Bir sosyal ağ $\mathbf{g}$ ve $i, j \in N$ için $g_{ij} = 1$, i ve j arasında bir ilişkinin olduğunu aynı şekilde $g_{ij} = 0$ ise bir ilişkinin olmadığını temsil eder.

Daha önce değindiğimiz gibi arkadaşlık ilişkilerinin karşılıklı onay ile kurulduğundan dolayı $\mathbf{g}$ matrisinin simetrik¹⁰ olduğunu varsayacağız. $\mathcal{G}$ ile tüm simetrik sosyal ağları temsil edeceğiz.

⁹3. bölümde dinamik ağ oluşumunu risk paylaşım ağları üzerinde inceleyeceğiz.

¹⁰Bu karşılıklık aynı zamanda ilişkilerin yönsüz olduğu olarak adlandırılır. Eğer kişiler arasındaki ilişkilerin bir yönü varsa bu tip ağlara yönlü ağlar denir ve ağı temsil eden matris simetrik olmak zorunda değildir. Örnek olarak bilgi akışlarını temsil eden ağlar ya da girdi-çıkı ağları verilebilir.

Eğer tüm i, j için $g_{ij} = 0$ ise bu sosyal ağa *boş ağ* denir. Boş bir ağda bireyler arasında hiçbir ilişki yoktur. Benzer şekilde tüm $i \neq j$ için $g_{ij} = 1$ ise bu sosyal ağa *tam ağ* denir. Tam ağlarda her hangi iki kişi arasında bir ilişki vardır. Eğer bir i bireyi varsa öyle ki tüm $j \neq i$ için $g_{ij} = 1$ ise ve sosyal ağda başka hiçbir ilişki yoksa bu ağa *yıldız ağ* denir ve i bireyi bu ağın merkezindedir. Yıldız ağlarda bir kişi tüm ilişkilerin bir tarafıdır.

Her ne kadar ağları bir matris ile temsil etsek, notasyonda¹¹ ufak bir hata yaparak, $ij \in \mathbf{g}$ ile $g_{ij} = 1$ 'i aynı anlamda kullanacağız. Benzer bir şekilde $\mathbf{g} + ij$ ile $\mathbf{g}$ ağına ij ilişkisi eklenmesi ile elde edilen sosyal ağı ve $\mathbf{g} - ij$ ile de $\mathbf{g}$ ağından ij ilişkisinin çıkarılması ile elde edilen sosyal ağı kastedeceğiz.

$N_i(\mathbf{g}) = \{j \in N : g_{ij} = 1\}$ ile bir sosyal ağdaki i bireyin *komşularını* yani arkadaşlarını, $d_i(\mathbf{g}) = \#N_i(\mathbf{g})$ ile de *derece* yani arkadaş sayısını gösterir. $\mathbf{d}(\mathbf{g}) = (d_1(\mathbf{g}), \dots, d_n(\mathbf{g}))$ derece vektörünü ve $\mathbf{D}(\mathbf{g}) = \text{diag}(\mathbf{d}(\mathbf{g}))$ ise köşegenin derece vektörüne eşit olduğu ve diğer tüm değerlerin sıfır olduğu *köşegen derece matrisi* gösterir. Eğer kastedilen sosyal ağ $\mathbf{g}$ bağlamdan anlaşılıyor ise notasyonu basitleştirmek amacıyla derece vektörü için $\mathbf{d}$ ve köşegen derece matrisi için $\mathbf{D}$ 'i kullanacağız.

2.1.1 Patika, Bileşen ve Klik

Eğer $\{i_0, \dots, i_K\}$ bireyler serisi için $i_0 = i$ ve $i_K = j$ olmak üzere tüm $k = 0, \dots, K - 1$ için $g_{i_k i_{k+1}} = 1$ özelliği sağlanıyorsa i ve j arasında K uzunluğunda bir *patika* vardır. Patika tanımında dikkat edilmesi gereken unsur iki birey arasındaki patikanın en kısa patika olmasına gerek yoktur. Ayrıca patika tanımı döngülere¹² izin verir.

Eğer $ij \in \mathbf{g}$ ise i ve j bireyleri *doğrudan bağlıdır*. Eğer $ij \notin \mathbf{g}$ ise fakat i ve j arasında bir patika varsa i ve j bireyleri *dolaylı bağlıdır*. Eğer i ve j arasında bir patika yoksa o zaman bireyler bağlı değildir. Bir sosyal ağdaki her hangi iki birey arasında sonlu uzunlukta bir patika varsa *bağlı ağ* denir.

Bireyler kümesinin bir alt kümesi $S \subset N$ ve bir ağ $\mathbf{g}$ için bu ağın S alt kümesine sınırlanmış haline alt ağ $\mathbf{g}|_S$ denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

¹¹Her ne kadar biz sosyal ağların bir matris ile temsil edildiği yaklaşımı benimsesekte matematik disiplinin bir çalışma konusu Grafik/Çizge Teorisinde kümelere dayalı bir tanım da vardır. Bir ağ bir $(V(\mathbf{g}), E(\mathbf{g}))$ çiftinden oluşan bir grafik. $V(\mathbf{g})$ ağdaki kişileri (*düğüm*ler) ve $E(\mathbf{g})$ düğümler ile ilişkili *kenarları* gösterir. $E(\mathbf{g}) \subseteq \{K \subset N : |K| = 2\}$ sıralı olmayan tüm çiftleri içeren kümenin bir alt kümesidir.

¹²Patika tanımındaki bireyler serisi $\{i_1, \dots, i_K\}$ için her bir elemanın farklı olması şartı aranmamaktadır. Dolayısıyla döngüler mümkündür.

$$[\mathbf{g}|_S]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i, j \in S, g_{ij} = 1 \\ 0 & \text{aksi türlü} \end{cases}$$

Alt ağ $\mathbf{g}|_S$ için $\mathbf{g}$ 'nin alt asal matrisi de denir.

Bir ağ $\mathbf{g}$ için bireyler kümesinin bir alt kümesi $S \subset N$ eğer aşağıdaki şartlar sağlıyorsa *bileşen* olarak adlandırılır.

- i. her $i, j \in S(\mathbf{g})$ arasında sonlu bir patika vardır,
- ii. her $i \in S(\mathbf{g})$ ve $j \notin S(\mathbf{g})$ arasında bir patika yoktur.

Bileşen bir sosyal ağdaki birbirleri ile bağlantılı bireylerin en büyük kümeleridir. Dolayısıyla aynı bileşende bulunan bireyler birleri ile doğrudan ya da dolaylı bağlı iken diğer bireylerle ise bağlı değildirler. $S_i(\mathbf{g})$, i bireyin bağlı olduğu bileşeni gösterir. $\mathcal{S}(\mathbf{g})$ ise $\mathbf{g}$ ağıdaki tüm bileşenlerin kümesidir. Örneğin Şekil 1'deki ağ için bileşenlerin kümesi $\mathcal{S}(\mathbf{g}) = \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}, \{9\}$ 'dir.

$\{P_1, \dots, P_K\}$ kümeleri bireyler kümesinin birer alt kümesi ise ve aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa N kümesinin bir parçalanışıdır.

- i. her $k \in \{1, \dots, K\}$ için $P_k \neq \emptyset$
- ii. $\cup_i P_i = N$
- iii. her $i \neq j$ için $P_i \cap P_j = \emptyset$

Bireyler kümesi N 'nin alt kümelerinden oluşan $\{Q_1, \dots, Q_K\}$ kümesine eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa N kümesinin *çoklu kümesi* denir.

- i. her $k \in \{1, \dots, K\}$ için $Q_k \neq \emptyset$
- ii. $\cup_i Q_i = N$

Çoklu küme tanımı parçalanmadan farklı olarak elemanların kesişmelerinin boş küme olma şartını gerektirmez.

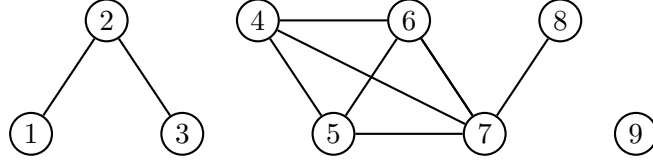
Bir sosyal ağ $\mathbf{g}$ için eğer bir Q alt kümesi varsa öyle ki $\mathbf{g}|_Q$ alt ağı tam ağ ise bu kümeye *klik* denir. Bir klik başka bir klikin alt kümesi değilse bu kümeye *max-klik* denir. Şekil 1'deki ağda $\{4, 5, 6\}$ bir klik iken max-klik değildir zira $\{4, 5, 6, 7\}$ kümesinin bir alt kümesidir.

Bir sosyal ağ için her elemanın klik olduğu bir çoklu kümeye, $\{Q_1, \dots, Q_K\}$, *klik örgüsü* denir. Her sosyal ağ için bir klik örgüsü vardır ve tek olmak zorunda değildir.

Bir sosyal ağ $\mathbf{g}$ için her elemanın max-klik olduğu bir çoklu kümeye, $Cl(\mathbf{g}) = \{Q_1, \dots, Q_K\}$, *max-klik örgüsü* denir. Her sosyal ağ için max-klik örgüsü vardır ve tektir. Şekil 1'deki sosyal ağ için max-klik örgüsü şu şekildedir: $Cl(\mathbf{g}) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{7, 8\}, \{9\}\}$.

Şekil 1

Bileşen ve Max-klik



Bileşen ve max-klik arasındaki fark şudur: Bir bileşen için tanımlı alt ağ birbiriyle bağlantılı herhangi bir ağ olabilirken max-klik için tanımlı alt ağ tam ağ olmalıdır. Dolayısıyla aynı bileşende bulunan bireyler birbirleri ile doğrudan ya da dolaylı bir şekilde ilişki içerisindeyken aynı max-klikteki bireyler birbirleriyle doğrudan ilişki içerisinde olduklarıdır. Örneğin Şekil 1'de $\{1, 2, 3\}$ bir bileşen iken max-klik değildir.

Eğer her $i < j$ ve $ij \in \mathbf{g}$ için tüm $i < k < j$ için $ik \in \mathbf{g}$ ve $kj \in \mathbf{g}$ ise bu sosyal ağ *aralık ağı* olarak adlandırılır. Aralık ağı tanımı bireylerin bir sıra içerisinde ifade edilebildiğini varsayar. Bir aralık ağında eğer bir birey bağlı olduğu başka bir bireyle aralarında olan her kişiyle de bağlıdır. Şekil 1'deki ağ bir aralık ağıdır. Bir aralık ağı için her bir i bireyine bir I_i aralığı atayabiliriz öyle ki her $ij \in \mathbf{g}$ için $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ olur.

2.1.2 Bonacich-Katz Merkeziyet Ölçüsü

Bu kısımda Bonacich-Katz Merkeziyet ölçüsünü tanımlayacağız. Tanıma geçmeden önce merkeziyet ölçüsü ile ne kastedildiğine ve önerilen çeşitli ölçü yöntemleri üzerine bir özet vermek isteriz. Sosyal ağlar literatüründe bir bireyin ağdaki konumundan kaynaklanan önemi, etkisi, popülaritesi veya merkeziyetini ölçmek için önerilmiş çeşitli tanımlar vardır. Tabi ki önem veya merkeziyetten ne kastedildiği sosyal ağın hangi tür ilişkileri tanımladığı ile yakın alakalıdır. Örneğin sosyal medya uygulamalarında kişiler takipçi sayılarına göre önem kazanmakta ve çok fazla takipçisi olan kişiler sosyal medya fenomeni olarak adlandırılmaktadır. Akademisyenlerin yaptığı araştırmalarda verdikleri referanslar üzerinden en etkili çalışmanın belirlemesi bir başka örnek olarak verilebilir. Sosyal ağlar dışında bir örnek olarak bir epidemi esnasında bir salgın hastalığı bulaştıran bireyleri gösteren bir ağ üzerinde en fazla sayıda kişiye hastalığı bulaştıran kişilere süper bulaştırıcı denir. Her birinde önem ve merkeziyet kavramları farklılaştığından çeşitli sayıda tanım

önerilmiştir öyle ki önerilen bir tanıma göre en önemli kişi bir başka tanıma göre oldukça önemsiz olabilir. Her bağlam için eksiksiz çalışan bir önem/merkeziyet tanımı bulmak bu yüzden oldukça zordur.

Merkeziyet ölçüsü için ilk akla gelen örnek *derece merkeziyet*dir. Kısaca bir bireyin derece merkeziyeti derece vektörüne eşittir. Bu tanım bireylerin sadece arkadaş sayıları ile ilgilendiğinden bireyin ağdaki yerel konumu ile ilgilidir. Bu tanım bireyin ikinci dereceden ulaşabildiği kişileri veya sosyal ağ üzerindeki patikaları dikkate almadığı için bazı durumlarda kısıtlı bir tanım olabilir. Önerilen bir başka ölçü ise *yakınlık merkeziyet* tanımıdır. Bir bireyin yakınlık merkeziyeti diğer tüm kişilere olan uzaklığının¹³ tersinin toplamıdır:

$$C(i) = \sum_{j \in N} \frac{1}{d(i, j)} = \frac{n-1}{d(i, j)}$$

Bu tanıma göre en merkezdeki birey diğer tüm bireylere en kısa adımda ulaşabilen yani diğer tüm bireylere bir anlamda en yakındaki kişidir. Değineceğimiz bir diğer merkeziyet ölçüsü de *aradalık merkeziyet* ölçüsüdür. σ_{ij} , i ve j arasındaki en kısa patikaların sayısı iken $\sigma_{ij}(k)$ bu patikaların k kişisi üzerinden geçenlerinin sayısını temsil etmek üzere, aradalık merkeziyet ölçüsü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$B_k(\mathbf{g}) = \sum_{i \neq k \neq j} \frac{\sigma_{ij}(k)}{\sigma_{ij}}$$

Aradalık merkeziyet ölçüsü olası tüm patikalarda en sık rastlanan bireylere daha yüksek değerler verir.

Yukarıda bahsettiğimiz merkeziyet ölçülerinden derece sadece bireyin birinci dereceden arkadaşlarına bakarken diğer ölçüler ise patikaları esas alarak ölçüler tanımlar. Eğer söz konusu ağ bir şekilde bir akım ilişkileri ile ilgili ise patika esaslı tanımlar faydalı olabilir. Bu tip ağlara örnek olarak dedikodu şeklinde bilginin yayıldığı ağlar, arkadaş tavsiyesine dayalı reklam ağları ve alacak-verecek ilişkilerini gösteren ağlar örnek olarak verilebilir.

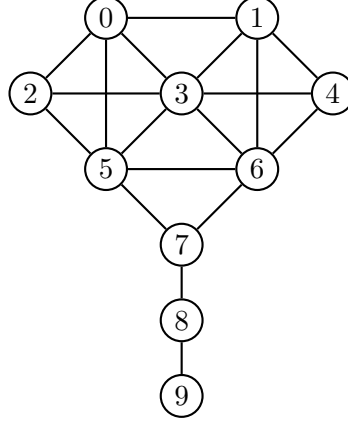
Krackhardt (1990) tarafından önerilen Şekil 2’de gösterilen ağda derece merkeziyet ölçüsüne göre en merkezi kişi 3 bireyi iken yakınlık merkeziyet ölçüsüne göre 5 ve 6 bireyleri ve aradalık merkeziyet ölçüsüne göre ise 7 bireyi en merkezi bireylerdir. Bu örnekte aslında merkeziyet ölçülerinin ciddi farklılıklar gösterdiklerini ve sosyal ağın bağlamına göre de kullanılan merkeziyet ölçüsü tercihinin önemli olduğunu göstermektedir.

Bonacich-Katz merkeziyet ölçüsünü yukarıda bahsedilen tüm ölçülerden ayıran

¹³İki kişi arasındaki uzaklık $d(i, j)$, i ve j arasındaki en kısa patikanın adım sayısıdır.

Şekil 2

Krackhardt Uçurtma Ağı



temel özellik bir bireyin merkeziyetini kendisi ile ilişkide olan bireylerinin önemleri cinsinden ifade etmesidir. Yani en önemli/merkezi kişi diğer önemli/merkezi kişilerle arkadaşır olarak da özetleyebiliriz. Ağ oyunu dengesinde karşımıza çıkacak bu ölçünün yukarıda bahsedilen özelliğini açıklayabilmek için önce Bonacich-Katz merkeziyet ölçüsünü formel tanımını vermeliyiz.

Bir sosyal ağın k 'inci kuvvetini $\mathbf{g}^k$ ile temsil edelim¹⁴. Bir sosyal ağ matrisi $\mathbf{g}$ bireylerin direk ilişkilerini gösterirken $\mathbf{g}^k$ bireyler arasındaki k uzunluğundaki patikaların sayısını gösterir. Sosyal ağın k 'inci kuvvetinin ij koordinatı $g_{ij}^{[k]}$, i ile j arasındaki k uzunluğundaki patikaların toplam sayısı gösterir. Şekil 3'de gösterilen ağ için 1 ve 2 bireyleri arasından 3 uzunlukta toplam 3 farklı patika¹⁵ vardır ve bu patikalar $\{1, 2, 1, 2\}$, $\{1, 2, 3, 2\}$, $\{1, 2, 4, 2\}$ 'dir. Bir başka deyişle 1 bireyi 2 bireyine 3 farklı 3 adımlık yolla ulaşabilir.

$\mathbf{1}$ vektörü n uzunluğunda birler vektörünü temsil etmek üzere, her k için $\mathbf{g}^k \mathbf{1}$ vektörünün i koordinatı i bireyinden başlayan k uzunluğunda her hangi başka bir bireyde sonlanan tüm patikaların toplam sayısını gösterir¹⁶.

Artık Bonacich-Katz Merkeziyet Ölçüsünün formel tanımını verebiliriz. Her hangi bir $\lambda \geq 0$ reel sayısı ve $\mathbf{g}$ sosyal ağı için Bonacich-Katz Merkeziyet Ölçüsü aşağıda tanımlanmış olan n uzunluğundaki vektördür.

$$\mathbf{B}(\mathbf{g}, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathbf{g}^k \mathbf{1} \quad (2.1)$$

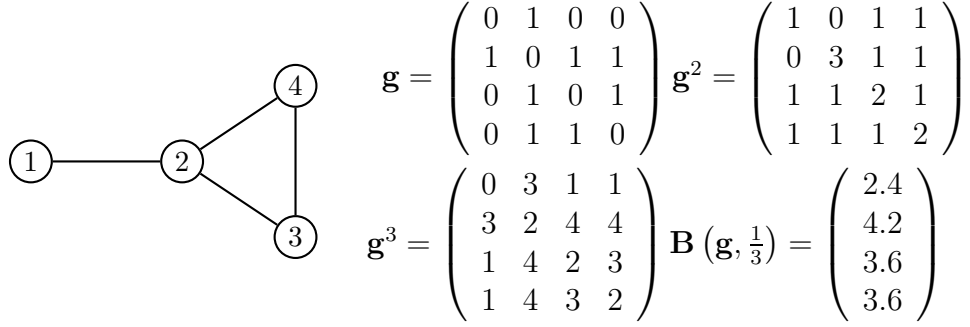
¹⁴ $\mathbf{g}^0 = \mathbf{I}$ birim matrise eşit olduğu kabul edilir.

¹⁵Patika tanımının döngülere izin verdiğini yeniden hatırlatırız.

¹⁶ $k = 0$ iken $\mathbf{g}^0 \mathbf{1}$ ifadesi birler vektörüne, $k = 1$ iken $\mathbf{g} \mathbf{1}$ derece vektörüne, $\mathbf{g} \mathbf{1} = \mathbf{d}(\mathbf{g})$, eşittir.

Şekil 3

Bonacich-Katz Merkeziyet Ölçüsü



Her bir i bireyi için Bonacich-Katz merkeziyet ölçüsü $B_i(\mathbf{g}, \lambda)$ bu bireyden başlayan her k uzunluktaki tüm patikaların sayılarını geometrik bir şekilde azalan λ^k ile indirgeyerek bu indigenmiş patikaların toplamını verir. Eğer λ değeri yeterince küçük ise 2.1 denklemindeki sonsuz toplam sonlu bir değere yaklaşır.

$$\mathbf{B}(\mathbf{g}, \lambda) = (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{g})^{-1} \mathbf{1} \quad (2.2)$$

Sonlu bir değere eşit olması için λ 'nın üst sınırı sosyal ağ $\mathbf{g}$ 'nin en yüksek özdeğerinin terisidir. (Bkz. Debreu ve Herstein (1953))

$b_i = \mathbf{B}_i(\mathbf{g}, \lambda)$ ifadesi i bireyinin Bonacich-Katz merkeziyet ölçüsünü göstermek üzere 2.2 nolu denklem aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$b_i = 1 + \lambda \sum_{j \in N} g_{ij} b_j = 1 + \lambda \sum_{j \in N: g_{ij}=1} b_j \quad (2.3)$$

Bir başka ifade ile, i bireyinin merkeziyet ölçüsü arkadaşlarının merkeziyet ölçülerinin ağırlıklı toplamıdır. Örneğin Şekil 2'de Bonacich-Katz merkeziyet ölçüsüne göre en merkezi kişi 3 bireyidir¹⁷. Bu sadece 3 bireyinin en fazla sayıda arkadaşı olması ile alakalı değildir aynı zamanda arkadaşı olduğu tüm bireylerinde yüksek merkeziyet ölçülerine sahip olması ile alakalıdır.

Şu ana kadar verilen tüm merkeziyet ölçüleri bireylerin sadece sosyal ağdaki pozisyonlarından kaynaklanan merkeziyet ve önemlerini ölçer. Yani bireylerin isimlerinin ve sosyal ağ dışındaki özelliklerinin hiçbir önemi yoktur. Fakat bireylerin sosyal ağdaki konumları dışında bireysel ve dışsal önemlerinin olduğu durumlar

¹⁷Şekil 2'de gösterilen ağ için en yüksek özdeğerinin tersi yaklaşık 0,23'dir. $\lambda = 0,2$ değeri için 3 bireyinin merkeziyet ölçüsü 9,37'dir. Tüm bireylerin merkeziyet ölçüleri ise [7,06 7,06 5,88 9,37 5,88 7,99 7,99 4,64 2,21 1,44]'tür.

düşünülebilir¹⁸. 2.1 nolu denklemde verilen Bonacich-Katz merkeziyet ölçüsü tanımında bu tip dışsal faktörleri dikkate almaz ve her bireyin 1 baz merkeziyet değeri olduğunu kabul eder dolayısıyla yüksek merkeziyet değeri bireyin sosyal ağ ilişkileri içerisindeki konumundan kaynaklanır. 2.1 denklemindeki $\mathbf{1}$ birler vektörünü bahsettiğimiz dışsal önem ve merkeziyetleri temsil eden $\mathbf{u}$ vektörü ile değiştirebiliriz¹⁹. Bu bizi aşağıdaki tanıma ulaştırır.

$$\mathbf{B}_{\mathbf{u}}(\mathbf{g}, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathbf{g}^k \mathbf{u} = (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{g})^{-1} \mathbf{u} \quad (2.4)$$

Yukarıda verdiğimiz genellemeye ek olarak bireylerin birbirleri üzerindeki etkileri gösteren sosyal ağ matrisi yerine bu etkilerin şiddetlerini temsil eden $\mathbf{H}$ matrisini kullanabiliriz. Öyle ki tüm i, j çiftleri için $h_{ij} \in (0, 1)$ reel değerler alan ve bireylerin birbirleri üzerindeki etkilerinin şiddetini temsil eden bir matrisdir. 2.4 denklemdeki sosyal ağ matrisi yerine tanımladığımız $\mathbf{H}$ matrisini kullanırsak aşağıdaki *Genelleştirilmiş Bonacich-Katz Merkeziyet Ölçüsü* tanımına erişiriz.

$$\mathbf{B}_{\mathbf{u}}(\mathbf{H}, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathbf{H}^k \mathbf{u} = (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{H})^{-1} \mathbf{u} \quad (2.5)$$

2.2 Sosyalleşme: Ağ Oyunu

Her i bireyi, $\theta_i \in [0, 1]$ tipi ile karakterize edilir ve $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ tip vektörüdür. Bu nedenle, bu kısım boyunca ” i bireyi” ve ”tipi θ_i olan birey” ifadelerini eş anlamlı olarak kullanacağız. Bireyleri tipi, örneğin esrar kullanma sıklığı, alkollü içecek kullanımı veya eğitim arzusu veya siyasi pozisyon gibi belirli bir davranışa eğilimi veya yönelimi olarak yorumlanabilir.

Bireyler sosyal ağ içerisinde bir davranışa $x_i \in [0, 1]$ karar verir ki bu kişinin tipinden farklı olarak gözlemlenen davranışdır. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ davranış profili olarak adlandırılır.

Bir sosyal ağ $\mathbf{g}$ ve davranış profili $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ için i bireyinin fayda fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$u_i(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = (1 - \mu) \left(1 - \frac{1}{\tau_i} (x_i - \theta_i)^2 \right) + \mu \sum_j g_{ij} \left(1 - \frac{1}{\tau_i} (x_i - x_j)^2 \right) \quad (2.6)$$

¹⁸Bkz. Bonacich ve Lloyd (2001)

¹⁹Kurduğumuz modelde bireylerin dışsal farklılıklarını temsil eden bir tipleri olduğu için bir sonraki kısımda $\mathbf{u}$ vektörü yerine θ tipler vektörünü kullanacağız.

Bir bireyin faydası iki bölümden oluşur: Davranışının kendi tipiyle koordinasyonu ve davranışının arkadaşlarının davranışları ile koordinasyonu. Koordinasyon faydalarının her ikisi de 1'e göre normalize edilir. $\mu \in [0, 1]$, arkadaşıyla koordinasyonun kendi tipiyle koordinasyona göre ağırlığını belirleyen bir parametredir. Eylemi x_i ile tipi θ_i arasındaki fark ve davranışı x_i ile arkadaşlarının davranışları x_j arasındaki fark arttıkça, bireyin faydası azalır ve τ_i faydadaki bu azalmanın büyüklüğünü belirler. Bir bireyin faydası, kendi tipiyle koordinasyon faydasının ve arkadaşlarıyla koordinasyon faydasının toplamının ağırlıklandırılmış halidir.

Ağ oyununu $\Gamma(\mathbf{g}) = \{N, \{x_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}\}$ olarak tanımlıyoruz; burada N oyuncuların kümesi, $x_i \in [0, 1]$ oyuncunun stratejileri, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ strateji profili ve $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{g})$ bireylerin faydası fonksiyonudur.

Sosyalleşme, arkadaşların kişinin davranışları üzerindeki etkisine odaklanır ve bu etkilerin arkadaşların davranışları arasında benzerliklere yol açtığını iddia eder. Bu nedenle, akran etkisi altındaki bireyler, bireyler arasında stratejik bir etkileşim yaratan arkadaşlarının eylemlerine dayanarak eylemlerini seçerler²⁰. Bu nedenle, şimdi, bireylerin stratejik davranışını yakalayan ağ oyununun Nash Dengesi $\mathbf{x}^*(\mathbf{g})$ 'yi ele alacağız. Ancak, dikkatimizi Nash Dengesinin ayrıntılarına çevirmeden önce, iki uç durumu ele almaya değer buluyoruz.

İlk durum $\mu = 1$ olduğundadır. Bu durumda tüm bireylerin fayda fonksiyonu $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \sum_j g_{ij} \left(1 - \frac{1}{\tau_i}(x_i - x_j)^2\right)$ olur ve her $x^* \in [0, 1]$ için $x_i^* = x^*$ olan Nash Dengeleri kümesi vardır. İkinci durum $\mu = 0$ olduğundadır. Bu durumda ise bireylerin fayda fonksiyonu $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 1 - \frac{1}{\tau_i}(x_i - \theta_i)^2$ olur ve tüm bireyler için Nash Denge stratejisi tiplerine $x_i^* = \theta_i$ eşittir. Bir i bireyinin hiç arkadaşı olmadığında, yani faydası yukarıdaki son durumla aynı olduğunda en uygun davranış kendi tipini seçmektir. Bu nedenle, bir bireyin koordine edecek bir arkadaşı varsa ve arkadaşlarıyla koordinasyona μ ağırlığı pozitifse davranış tipinden farklıdır.

$\mu \in (0, 1)$ için tek bir Nash Dengesi vardır ve bu denge, aşağıdaki teoremden ifade edilen Genelleştirilmiş Bonacich-Katz Merkeziyet Ölçüsü ile orantılıdır.

Teorem 1 *Bir ağ oyunu $\Gamma(\mathbf{g})$ herhangi bir $\mathbf{g}$ için bir Nash Dengesine sahiptir. Dahası, eğer $\mu < 1$ ise, o zaman Nash Dengesi tektir.*

$$\mathbf{x}^* = (1 - \mu)\mathbf{B}_u(\mathbf{h}, \mu)$$

²⁰Kandel (1978) sosyalleşmenin esrar kullanımı durumunda en güçlü olduğunu bulur ve uyuşturucu kullanımının özellikle stratejik bir davranış olduğunu öne sürer. Sayfa 436'ya bakınız.

Nash Dengesi Genelleştirilmiş Bonacich-Katz Merkeziyet Ölçüsü ile orantılıdır

$$\mathbf{B}_u(\mathbf{h}, \mu) = \sum_{t=0}^{\infty} \mu^t \mathbf{h}^t \mathbf{u} = [\mathbf{I} - \mu \mathbf{h}]^{-1} \mathbf{u}$$

Yukarıdaki denklemlerde geçen $\mathbf{h}$ ve $\mathbf{u}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$h_{ij} = \frac{1}{1 - \mu + \mu d_i(\mathbf{g})} g_{ij}$$

$$u_i = \frac{1}{1 - \mu + \mu d_i(\mathbf{g})} \theta_i$$

Teorem 1'in ilk kısmı olan Nash Dengesinin varlığı, Kakutani'nin Sabit Nokta Teoremi'nin koşullarını doğrulayarak standart argümanları takip ederek gösterilebilir. Teoremin ikinci kısmı ise, Ballester vd. (2006)'nın Teorem 1'inden dolayı doğrudur.

Ayrıca, Nash Denge eylemlerini geri bildirim etkilerini özetleyen Genelleştirilmiş Bonacich-Katz Merkezilik Ölçüsünden farklı alternatif bir ifade de sağlıyoruz. Nash Dengesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{g}) = \mathbf{M}^{-1} \theta$$

Burada $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \frac{\mu}{1-\mu}(\mathbf{g} - \mathbf{D})$, M -Matris'tir²¹ ve $\mathbf{D}$ köşegeni derece vektörüne eşit olan bir matristir.

$\mathbf{N} := \mathbf{M}^{-1}$ olsun. Dolayısıyla bireylerin davranışları

$$x_i^*(\mathbf{g}) = \sum_{j \in N} n_{ij} \theta_j$$

şeklinde de yazılabilir. Hem $\mathbf{M}$ hem de $\mathbf{N}$ 'nin her satırının toplamı 1'e eşittir. Yani Nash Dengesinin alternatif ifadesinde, herhangi bir i bireyinin denge davranışı, tüm bireylerin tiplerinin (kendisi de dahil olmak üzere) ağırlıklı ortalamasıdır ve n_{ij} , i bireyinin denge davranışı $x_i^*(\mathbf{g})$ üzerindeki j bireyinin tipi θ_j 'in ağırlığını temsil eder. Ayrıca, bir i bireyi, sosyal ağ $\mathbf{g}$ 'den bağımsız olarak kendi tipine en yüksek ağırlığı atar²², yani, tüm $\mathbf{g}$ için tüm $k \in N$ için $n_{ii} \geq n_{ik}$.

Ağ oyunundaki her bir bireyin diğer bireylerin davranışlarına en iyi cevabı, bireyin kendi tipinin ve ağdaki arkadaşlarının ortalama davranışlarının ağırlıklı ortalaması olan

²¹Detaylar için eklere bakınız.

²²Bkz. eklerdeki Teorem 22. Ayrıca $\mathbf{M}$ simetrik olduğunda $\mathbf{N}$ de simetriktir.

bir davranış seçmektir:

$$x_i^*(x_{-i}) = \frac{1-\mu}{1-\mu+\mu d_i(\mathbf{g})} \theta_i + \frac{\mu}{1-\mu+\mu d_i(\mathbf{g})} \sum_j g_{ij} x_j \quad (2.7)$$

Bu, bireylerin arkadaşlarının davranışlarının sosyalleşme süreci boyunca bu bireyin davranışı üzerindeki etkisini yansıtır. Bireyin en uygun davranışı, kendi tipinin ve arkadaşlarının davranışlarının toplamının ağırlıklı ortalamasını seçmektir. Bir i bireyi kendi tipine $1-\mu$ ağırlık atar ve her arkadaşına μ ağırlık atar ve atanan toplam ağırlıklar $1-\mu+\mu d_i(\mathbf{g})$ 'ye ulaşır. Bu da hem Teorem 1'deki $\mathbf{h}$ ve $\mathbf{u}$ tanımlarında hemde 2.7 denklemindeki paydalardaki ifadeye eşittir ve $1-\mu+\mu d_i(\mathbf{g})$ bir normalleştirme faktörü olarak karşımıza çıkar. Fayda fonksiyonunda arkadaşlarla koordinasyon faydalarının ağırlığı μ arttıkça, bireyin davranışı arkadaşlarının ortalama davranışına yaklaşır.

Ayrıca, herhangi bir ağda, denge eylemlerinin toplamı tiplerin toplamına eşittir.

Önerme 2 $\mu < 1$ olsun ve $x^*(\mathbf{g})$, ağ oyunu $\Gamma(\mathbf{g})$ 'nin Nash Dengesi olduğunu varsayalım, o zaman

$$\sum_{i \in N} x_i^*(\mathbf{g}) = \sum_{i \in N} \theta_i$$

Yukarıdaki önermenin doğrudan bir sonucu, denge davranışları ile ortalama tip $\bar{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \theta_i$ arasındaki fark 0'a eşittir. Denge davranışı ortalama tipten daha yüksek olan tüm bireyler için, denge davranışları ortalama tipten daha düşük olan bireyler vardır. Yani, ortalama denge davranışı toplumdaki tüm ağlarda ortalama tipe eşittir.

Sonuç 3 $\mu < 1$ ve $x^*(\mathbf{g})$ ağ oyunu $\Gamma(\mathbf{g})$ 'nin Nash Dengesi olduğunu varsayalım, o zaman

$$\sum_{i \in N} [x_i^*(\mathbf{g}) - \bar{\theta}] = 0$$

Sosyalleşme öncesi toplumun belli bir davranışına eğilimini temsil eden ortalama tip sosyalleşme sonrası ortaya çıkan davranışların ortalamalarına eşittir. Bir başka ifade ile sosyalleşme birbiri ile ilişki içerisinde bulunan bireylerin davranışlarını birbirine yaklaştırırken toplumsal bir etkisi yoktur.

2.3 Ön Seçilim: Ağ Oluşumu

Önceki kısımda, bireylerin belirli bir ağ için en uygun davranışını ele aldık ve arkadaşların bir bireyin davranışı üzerindeki etkilerini gösterdik. Sosyalleşme nedeniyle, bireyler arkadaşları varsa ve sosyalleşme etkisi altında en uygun davranışları olarak tiplerinden farklı davranışlar seçerler. Aslında, bireyler

davranışlarını, davranışları ile arkadaşlarının davranışları arasındaki benzerlikleri artırmak için seçerler ve bu da sosyalleşme fikrini yansıtır. Ancak, belirli davranışlar üzerinde koordinasyon sağlamak için onlarla etkileşime gireceklerse arkadaşlarının kim olması gerektiğine karar vermelerine izin verilmez. Bu bölümde, bireylerin davranışlarda yeterince büyük bir fark olduğu için ilişkilerini sonlandırmaya karar verebildikleri veya davranışlar arasında yüksek benzerliklerden dolayı yeni ilişkiler kurmaya karar verebildikleri sosyal ağların ön seçim yönünü ele alacağız. Bireyler, Nash denge davranışları altında ağ oyununda o bireyin faydasına eşit olacak şekilde ayarlanan olası ağlar üzerine tanımlanacak bir fayda fonksiyonuna göre bir bağlantı ekleme veya sona erdirme kararları alırlar:

$$U_i(\mathbf{g}) = u_i(\mathbf{x}^*(\mathbf{g}), \mathbf{g}) \quad (2.8)$$

Ağlar üzerine tanımlı fayda sosyalleşme etkilerini de kapsar, yani bir birey bir ilişkiyi eklediğinde veya sildiğinde bireyin faydası sadece ağ yapısı artık farklı olduğu için değil, denge eylemleri de değiştiği için değişir. Dolayısıyla bireyler ilişkilerini güncelleme kararı verdiklerinde var olan durumdaki davranışlar üzerinden karar vermemekte bunun ötesinde ilişkilerini güncellediklerinde davranışların nasıl değişeceğini (sosyalleşme etkilerini de) öngörerek karar verirler. Fayda fonksiyonu $U : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bireyin tüm olası ağları sıralamasına olanak tanır, böylece bir arkadaşlığa başlamanın veya bitirmenin onlar için yararlı olup olmadığına karar verebilirler.

Arkadaşlık ilişkilerinin iki yönlü olduğunu varsayıyoruz: Arkadaşlık ilişkisi bireylerin her ikisinin de birbirlerinin arkadaş olarak görmektedir. Dolayısıyla arkadaşlık ağlarında, yeni bir arkadaşlık kurmak için her iki bireyinde de onayı gereklidir yani her iki birey de yeni arkadaşlıktan fayda elde etmelidir. Ancak bireyler biri eğer bu faydasına ise tek başına bir arkadaşlığı tek taraflı olarak sonlandırabilirler. İkili kararlılık, arkadaşlık ağlarının bu özelliğini yansıtır. Bir sosyal ağ $\mathbf{g}$ için eğer

$$(i) \text{ tüm } ij \in \mathbf{g} \text{ için, } U_i(\mathbf{g}) \geq U_i(\mathbf{g} - ij) \text{ ve } U_j(\mathbf{g}) \geq U_j(\mathbf{g} - ij), \text{ ve}$$

$$(ii) \text{ tüm } ij \notin \mathbf{g}, \text{ eğer } U_i(\mathbf{g} + ij) > U_i(\mathbf{g}) \text{ ise } U_j(\mathbf{g} + ij) < U_j(\mathbf{g}).$$

ise bu sosyal ağın *ikili kararlı* olduğu söylenir.

Bir sosyal ağın ikili kararlı olması için gereken koşullar var olan hiçbir ilişkinin sonlandırılmaması ve yeni hiçbir ilişkinin eklenmemesi için gerekli şartlardır. Yukarıdaki tanımdaki ilk koşul, ikili kararlı bir ağda var olan bir ilişkiyi sonlandırmanın bu ilişkideki bireylerden en az birisinin faydasını azaltması gerektiğini

belirtir²³. İkinci koşul yeni ilişkilerin eklenmesiyle ilgilidir. İkili kararlı bir ağda yeni bir ilişki eklemek bir bireyin faydasına ise, diğer birey bu ilişkinin eklenmesi ile daha kötü durumda olması gerektirir ki bu ilişki ikinci birey tarafından onaylanmasın²⁴. Başka bir deyişle, ikili kararlı bir ağda, hiçbir birey tek başına bir bağlantıyı silerek kendi faydasını artıramaz ve hiçbir iki birey de bir bağlantı ekleyerek faydalarını karşılıklı olarak artıramaz.

2.3.1 İkili Kararlı Ağların Varlığı

Literatürde ikili kararlı ağların varlığına ilişkin bilinen sonuçlar, modelimize uygulanmadıkları için bize yardımcı olmuyor. İkili kararlı ağların varlığına ilişkin ilk sonuçlardan birisi, herhangi bir fayda fonksiyonu $U : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ için (en az bir) ikili kararlı ağ veya kapalı bir döngü olduğunu gösteren Jackson ve Watts (2001) tarafından sunulmuştur²⁵. Jackson ve Watts (2001) olası tüm ağlar üzerinde tanımlı $w : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ potansiyel fonksiyonu tanımlarlar öyle ki $w(\mathbf{g}') > w(\mathbf{g})$ ancak ve ancak $\mathbf{g}'$, $\mathbf{g}$ 'den bir iyileştirme ve $\mathbf{g}$ ile $\mathbf{g}'$ yalnızca bir bağlantıda farklılık gösterir. Eğer böyle bir potansiyel fonksiyonu varsa kapalı döngünün olmadığını dolayısıyla ikili kararlı ağların var olduğunu gösterirler. Bireylerin faydalarının toplamı olan $w(\mathbf{g}) = \sum_i U_i(\mathbf{g})$ fonksiyonunun potensiyol fonksiyon olarak kullanılabileceğini önerirler. Ancak modelimizde, denge davranışları üzerindeki geri bildirim etkileri nedeniyle ağ yapısında değişiklikler olduğunda denge eylemlerinin nasıl değiştiğini takip etmek oldukça zordur. Ağdaki bir değişiklik, aynı bileşene ait herhangi bir bireyin denge davranışlarında (dolayısıyla faydada) değişikliklere yol açar. Ayrıca, i, j bireyleri $\mathbf{g} + ij$ 'yi $\mathbf{g}$ 'ye tercih etse bile, bu diğer bireylerin faydasında bir azalmaya yol açabilir, böylece $\mathbf{g} + ij$, $\mathbf{g}$ 'ye göre bir iyileştirme olsa bile faydaların toplamı azalabilir. Jackson ve Watts (2001), ağ oluşumu modellerinin temel özellikleri hakkında ikili kararlı ağların varlığını garanti eden herhangi bir varsayım sunmaz.

Hellmann (2009), ağların fayda fonksiyonu belirli koşulları sağlaması halinde ikili kararlı ağların varlığını göstermektedir. Fayda fonksiyonu kendi bağlantılarında

²³İki bireyin arasındaki bir ilişkinin eklenmesi veya çıkarılması durumunda her iki bireyinde faydalarını değiştirmediğini durumda ikili kararlı tanımı bu ilişkinin ikili kararlı ağda bulunmasını gerektirir. Bu anlamda, yukarıdaki tanım, bir ilişkinin bu bağlantıya dahil olan bireyler üzerinde hiçbir etkisi olmadığında daha büyük ağları tercih eder.

²⁴Bir ağ yalnızca yukarıdaki tanımdaki (i) koşulunu karşılıyorsa, buna *bağlantı silmeye dirençli* ağ denir ve yalnızca (ii) koşulunu karşılıyorsa, buna *bağlantı eklemeye dirençli* ağ denir. İkili kararlı bir ağ hem bağlantı silmeye hem de bağlantı eklemeye dirençlidir.

²⁵Kapalı döngü, $C \subset \mathcal{G}$ ağlarının bir alt kümesidir; öyle ki herhangi bir ağ $\mathbf{g} \in C$ için, kapalı döngüye ait olmayan başka bir ağ $\mathbf{g}' \notin C$ ağına giden bir iyileştirme yolu yoktur. Burada iyileştirme yolu, bağlantıda yer alan herhangi bir bireyin faydasını artırdığında bir bağlantının çıkarıldığı veya her iki bireyin faydasını artırdığında bir bağlantının eklendiği bir ağlar serisidir.

dışbükeyliği ve stratejik tamamlayıcılığı sağlıyorsa, o zaman kapalı bir döngünün var olmadığını ve ikili kararlı ağların var olduğunu göstermektedir. Kendi bağlantılarındaki dışbükeylik, bir bireyin arkadaşı sayısı arttıkça, herhangi bir bağlantıdan elde edeceği marjinal faydasının azalmadığı anlamına gelir. Stratejik tamamlayıcılık, bir bireyin herhangi bireyle kuracağı bağlantının marjinal faydasının, diğer bireyin kendisini içermeyen bağlantılar eklerse azalmadığı anlamına gelir. Hellmann (2009) sonuçları modelimiz için geçerli değildir. Modelimizdeki fayda fonksiyonu stratejik tamamlayıcılığı sağlamaz. Bunu görmek için boş bir ağda bitişik $i, i + 1, i + 2$ bireylerini düşünün. $i + 1$ ile bir bağlantının i bireyine marjinal faydası, $i + 1$ ve $i + 2$ arasında bir bağlantı eklerse azalır ve bu da fayda fonksiyonunun stratejik tamamlayıcılığı sağlamadığını gösterir. $i + 1$ ve $i + 2$ arkadaş olduğunda i 'nin marjinal faydasının azalmasının nedeni, $i + 1$ 'in kendi tipinden daha yüksek bir davranış seçmek olmasıdır; bu da i 'nin $i + 2$ ile koordinasyon faydalarını azaltacaktır.

Modelimizdeki bireyler tipleri ile karakterize edilir. Belirli bir bağlantının marjinal faydası esasen bu bağlantıya dahil olan iki bireyin koordinasyon faydalarına bağlıdır ve bu da bireylerin sahip olduğu arkadaş sayısına değil, bireylerin optimal davranışlarına bağlıdır. Diğer bireylerin sadece daha çok bağlantıya sahip olması değil, iki bireyin davranışlarının artık daha yakın olacağı bir şekilde bağlantılar kurması, ancak stratejik tamamlayıcılık tanımının gerektirdiği şekilde bu iki birey arasındaki bir bağlantının marjinal faydası artabilir.

2.3.2 İkili Kararlı Ağların Kısmi Karakterizasyonu

İkili kararlı ağların varlığını göstermek zor olsa da, bu kısımda modelin μ ve τ parametreleri belirli koşulları sağladığında ikili kararlı ağların kısmi karakterizasyonunu sunacağız. Nash Dengesi davranışları tolerans oranlarından bağımsızken, ön seçim sürecinde tolerans oranları kritik bir rol oynar. Analizi basitleştirmek için, tolerans oranlarının tüm bireyler için eşit ve bireylerin tiplerinin birbirleri ile eşit mesafede olduğunu varsayıyoruz:

- tüm i için $\tau_i = \tau$ ve
- $\theta_1 = 0$ ve tüm $k = 1, \dots, n - 1$ için $\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{1}{n-1}$.

k ve $k + 1$ bireylerine *bitişik bireyler* denir.

Kısmi karakterizasyona, tolerans oranı yeterince düşük olduğunda boş ağın ikili kararlı olduğunu göstererek başlıyoruz.

Önerme 4 $\mu \in (0, 1)$ olsun. Boş ağ ikili karardır ancak ve ancak $\tau < \frac{1-\mu}{(1+\mu)^2} \frac{1}{(n-1)^2}$.

Boş bir ağda, bitişik bireyler bir ilişki oluşturmak için en yüksek teşvike sahiptir. Bir ilişki oluşturdıklarında, denge davranışları tiplerindeki farktan $\frac{1}{n-1}$ daha yakın olacaktır. Yeni bir ilişki kurmak için yeterli faydaya sahip olup olmadıkları, denge davranışı artık tiplerinden farklı olacağından, kendi tipleri ile koordinasyon faydasındaki kaybın büyüklüğü ile arkadaşlarıyla koordinasyon faydasındaki kazancın büyüklüğüne bağlıdır. Tolerans oranı yeterince küçükse, kişinin kendisiyle koordinasyon faydasındaki kayıp, başkalarıyla koordinasyon faydasındaki kazançtan daha yüksek olacaktır. Tolerans oranındaki üst sınır, μ 'nun azalan bir fonksiyonudur. μ arttıkça, iki etki vardır: Bitişik bireylerin denge davranışları birbirine yaklaşır ve kendisiyle koordinasyon kaybının ağırlığı azalır. μ , 1'e yakınsadığında ise, tolerans oranı için üst sınır 0'a yakınsar. Şekil 5'de boş ağın $n = 5$ iken ikili kararlı olduğu kısıtlar gösterilmiştir.

Bir sonraki önermede, bireylerin derecelerinin en fazla 2 olduğu ağ alt kümelerinin ikili kararlı olması için tolerans oranları aralıklarını gösteriyoruz. İlk ağ kümesi, $\mathcal{I}_1$, tüm $\mathbf{g} \in \mathcal{I}_1$ için, tüm i için $d_i(\mathbf{g}) \leq 1$ ve eğer bir k için $d_k(\mathbf{g}) = 0$ ise, o zaman $d_{k-1}(\mathbf{g}) = d_{k+1}(\mathbf{g}) = 1$ olacak şekilde aralık ağlarının alt kümesidir. Bu alt ağ kümesinde bazı i için $d_i(\mathbf{g}) = 1$ ise, o zaman ya $g_{i-1,i} = 1$ ya da $g_{i,i+1} = 1$ olur. Bu ağlar kümesine diyadik ağlar da diyoruz çünkü tüm bileşenler ya tekildir ya da bitişik bireyler olan iki diyadı içerir.

İkinci ağ kümesi, $\mathcal{I}_2$, aralık ağların bir alt kümesidir öyle ki tüm $\mathbf{g} \in \mathcal{I}_2$ için $d_i(\mathbf{g}) \leq 2$ 'dir ve

- bir k için eğer $d_k(\mathbf{g}) = 2$ ise hem $g_{k-1,k} = 1$ hem de $g_{k,k+1} = 1$ olur,
- bir k için eğer $d_k(\mathbf{g}) = 0$ ise $d_{k-1}(\mathbf{g}) = d_{k+1}(\mathbf{g}) = 1$ olur.

Aşağıdaki önerme, yukarıda açıklanan ağ alt kümelerinin ikili kararlı olması için tolerans oranı ve koordinasyon ağırlığının sağlaması gereken koşulları göstermektedir.

Önerme 5 $\mu \in (0, 1)$ olsun.

- Eğer $\frac{1-\mu}{(1+\mu)^2} \frac{1}{(n-1)^2} \leq \tau < \min\{(1-\mu)\frac{1}{(n-1)^2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$ ise $\mathbf{g} \in \mathcal{I}_1$ 'deki ağlar ikili kararlıdır,
- Eğer $(1-\mu)\frac{1}{(n-1)^2} \leq \tau < \frac{4(1-\mu)(1-\mu^2)}{(1+2\mu)^2} \frac{1}{(n-1)^2}$ ise $\mathbf{g} \in \mathcal{I}_2$ 'deki ağlar ikili kararlıdır²⁶.

Önerme 5.i'deki alt eşik, önerme 4'deki boş ağ için gerekli olan eşik olduğu fark edilebilir. Bu nedenle, tolerans oranları boş ağın üst sınırını aştığında, iki bitişik birey

²⁶ $(1-\mu)\frac{1}{(n-1)^2} \leq \frac{4(1-\mu)(1-\mu^2)}{(1+2\mu)^2} \frac{1}{(n-1)^2}$ ancak ve ancak $\mu \leq \frac{\sqrt{7}-1}{4}$

bir bağlantı oluşturmak için gerekli teşvike sahip olur. Tolerans oranının üst eşiği ise bir bireyin diğer bitişik bireyle bağlantı oluşturmamasını önler. Bu nedenle, $\mathcal{I}_1$ 'deki herhangi bir ağda, bileşenler ya iki bitişik bireyden ya da tek bir bireyden oluşur ve hiçbir bağlantısı olmayan iki bitişik birey olamaz. Şekil 4'de $n = 5$ durumu için bu ağlar gösterilmiştir.

Tolerans oranları daha da arttığında, halihazırda bir arkadaşı olan bir birey, artık diğer bitişik bireylerle de bağlantı ekleme teşvikine sahip olur, yani, bir bireyin diğer iki bitişik bireyle bağlı olduğu ve merkezi birey olarak davrandığı 3 bitişik bireye sahip bir bileşen vardır. Yine Şekil 4'de $n = 5$ durumu için bu ağlar gösterilmiştir.

4 ve 5 önermelerindeki sonuçlarda, tolerans oranı önemli bir rol oynar. Tolerans oranı yeterince küçük olduğunda, bireylerin herhangi bir bağlantı eklemek için teşviki olmaz, böylece boş ağ tek ikili kararlı ağ olur. Tolerans oranları arttıkça, bireyler tip olarak en yakın olan bireylerle, yani bitişik bireylerle bağlantı kurmaya başlar. Tolerans oranı arttıkça, tüm diyadik ağlar $\mathbf{g} \in \mathcal{I}_1$ ikili kararlı hale gelir. Diyadik ağlarda, bir bireyin bir arkadaşı varsa, arkadaşı kendisine bitişik bir bireydir, yani arkadaşı tip bakımından en yakın olan bireylerden biridir. Başka bir deyişle, tip bakımından benzerlik, ön seçim olarak arkadaşlığa yol açar. Bu bağlantının ve sosyalleşme etkilerinin sonucu olarak bireyler davranışlarını birbirlerine daha yakın olacak şekilde belirler. Ayrıca, diyadik ağlarda hiçbir arkadaşı olmayan iki bitişik birey olamaz. Tolerans oranı yükseldikçe bireyler yeni bağlantılar kurarlar. Eğer tolerans oranı $(1 - \mu)\frac{1}{(n-1)^2}$ 'dan yüksek ise $\mathcal{I}_2$ 'deki ağlarda görüleceği üzere 3 kişiden oluşan bileşenler ikili kararlı ağlarda görülür.

Ek olarak, yukarıdaki sonuçlardaki tüm sınırlar, μ 'nun azalan fonksiyonudur ve μ değeri 1'e yakınsadıkça, tüm sınırlar 0'a yakınsar. Şimdiye kadar ele alınan tüm ağlarda, μ arttıkça arkadaşların eylemleri arasındaki farklar küçülür ve 0'a yakınsar. Bu nedenle, koordinasyondaki ağırlık arttıkça, bir ağın ikili kararlı olması için tolerans oranının o kadar yüksek olması gerekmez. μ 'deki artışın fayda üzerindeki etkisi iki sebeptendir. İlk olarak, denge eylemleri birbirine yaklaştıkça, koordinasyon faydaları artar ve koordinasyon faydaları üzerindeki ağırlık artar, ancak kendi koordinasyonundaki kayıp artık daha yüksek olsa da, bu koordinasyona daha düşük bir ağırlık atanır.

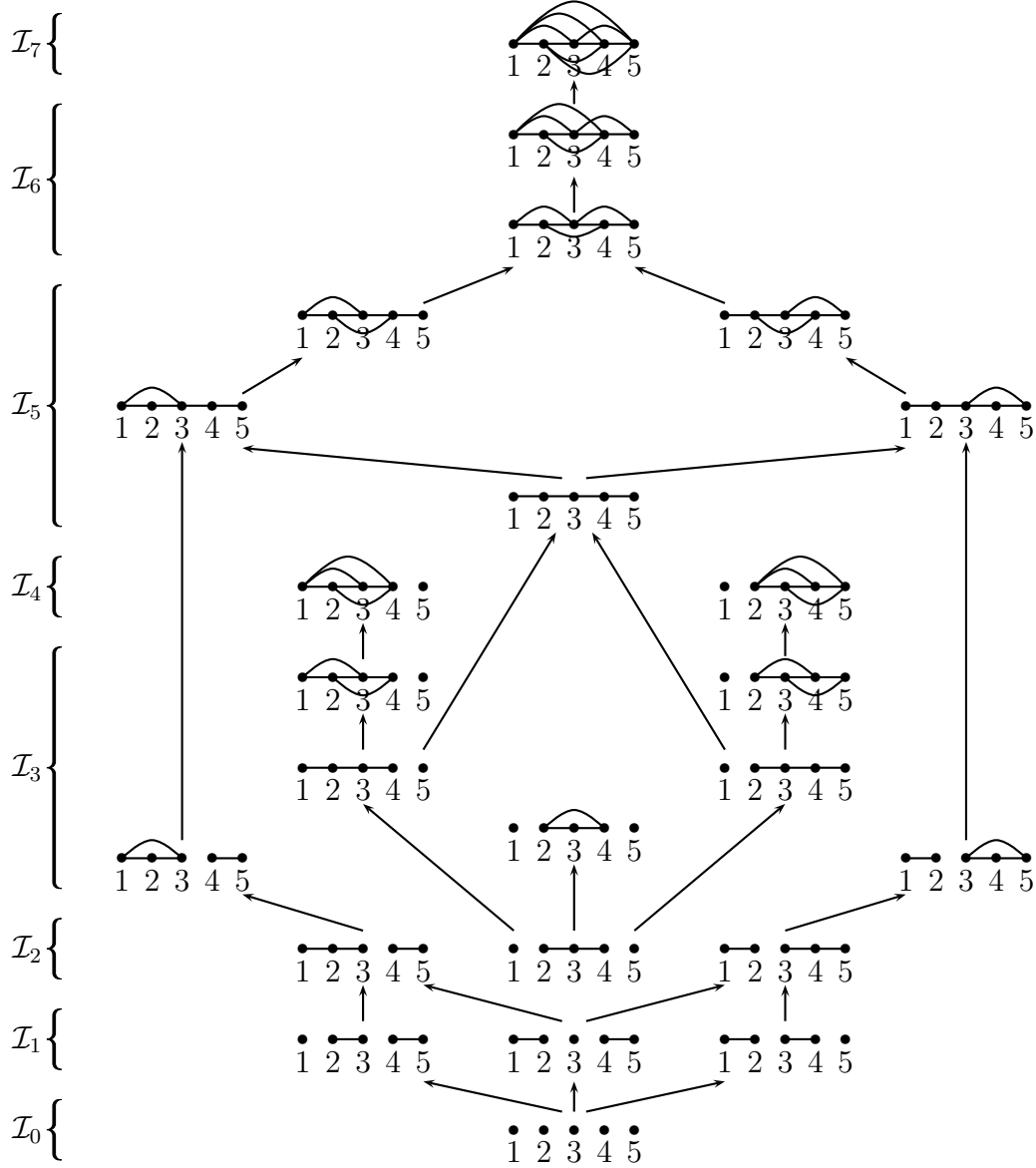
2.3.3 $n = 5$ için İkili Kararlı Ağlar

Bu kısımda $n = 5$ için ikili kararlı ağların hangi parametre değerleri için ikili karar olduğunu ve ikili kararlı ağların yapılarını inceleyeceğiz. Bir önceki kısımda sunduğumuz kısmi karektarizasyon ikili kararlı ağların parametreler değiştikçe nasıl

değiştiğinin temel fikrini veriyor. Fakat $n = 5$ gibi sabit bir değerde bu değişiklikleri görmek daha kolay olacaktır.

Şekil 4

$n = 5$ iken İkili Kararlı Ağlar



Şekil 4'de bir çizgi üzerine sıralanmış bireylerden oluşan ikili kararlı ağlar görülebilir. 1 bireyinin θ_1 değeri 0 iken 5 bireyinin θ_5 değeri ise 1'dir. Tipler arasında eşit uzaklık varsayımını koruyarak bireyleri eşit uzaklıkta bir çizgi üzerinde temsil ediyoruz. Bireyleri arasındaki çizgiler bireylerin bağlantılarını göstermektedir. Örneğin boş ağda bireyler arasında çizgiler yokken diyadik ağları gösteren $\mathcal{I}_1$ ağlarında ise bitişik bireyler arasındaki bağlantılar bireyler arası çizgilerle gösterilmiştir.

İkili kararlı ağlar arasındaki oklar ise parametre değerleri arttıkça en alttaki boş ağdan en üstteki tam ağa doğru ikili kararlı ağların nasıl değiştiğini göstermektedir. Bu okların yönü bir ağdan bir başka ağa geçiş için bireylerin teşviki olup olmadığına bağlıdır. Şekil 4'deki okların yönü tam ağ ikili kararlı olduğu durum için verilmiştir. Örneğin boş ağın ikili kararlı olduğu durumlarda tüm oklar ters yönlü olacaktır. Boş ağ ile tam ağ arasındaki ağların ikili kararlı olduğu durumda ise bu ağın üzerinde yer alan oklar aşağı yönlü iken altında yer alan oklar ise yukarı yönlü olacaktır. Boş ağdan çıkan oklar haricinde tüm ağlarda sadece tek bir yeni bağlantı kurulmaktadır. İkili kararlı ağlar aralık ağları olmak üzere 8 farklı alt ağ kümelerine bölünmüştür. Bu kümeler şekilde en solda gösterilmiştir. Bu aralık ağları kümelerinin benzer parametre değerleri için ikili kararlıdır.

Şekil 5'de ise bu aralık ağları kümelerinin ikili kararlı olduğu parametre değerleri gösterilmiştir. Dikey ekseninde tolerans oranı, τ ve yatay ekseninde akran etkisi, μ , olmak üzere her bir aralık ağlarının ikili kararlı olması için gereken parametre değerleri gösterilmiştir. Boş ağdan ibaret olan $\mathcal{I}_0$ hariç diğer aralık ağlarının ikili kararlı olduğu bölge yeşil ile ve kendinden önceki tüm aralık ağlarının parametreleri ise mavi renk ile gösterilmiştir. Bu sayede hem parametre değerleri arttıkça daha çok bağlantı içeren aralık ağlarının ikili kararlı olduğu bölgeler gösterilmiş hemde kendinden önceki aralık ağlarının ikili kararlı bölgeleri ile ilişkisi ve varsa kesişim bölgeleri gösterilmiştir.

Modelin parametrelerinin en küçük değerlerinde boş ağ ikili kararlı ağdır. Daha sonra ise diyadik ağlar $\mathcal{I}_2$ ve daha önce karakterize ettiğimiz $\mathcal{I}_2$ ağları ikili kararlı olacaktır.

$\mathcal{I}_2$ ağlarında Şekil 4'de en solda ve en sağdaki ağlarda tüm bireyler iki bileşene bölünmüştür. Parametre değerleri arttıkça bu ağlar kendilerinden çıkan okların işaret ettiği gibi her bir bileşeni tam ağa doğru genişlemektedir²⁷ ve kendi aralarında bir klik oluşturur. $\mathcal{I}_2$ ağlarında ortadaki ağ için ise uç tiplerdeki bireyler olan 1 ve 5 bireyleri bir bağlantıya sahip değildir. Bunun sebebi 2 ve 4 bireylerinin bulundukları bileşendeki diğer bireylerle davranışlarını koordine etmelerinden dolayı denge davranışlarının bağlantıda oldukları 3 bireyinin tipine yakınsamadır²⁸. Bu sebeple de verili parametre değerleri için 1 ve 5 bireylerinin bitişik bireylerle bağlantı kurması için teşvikleri azalmıştır.

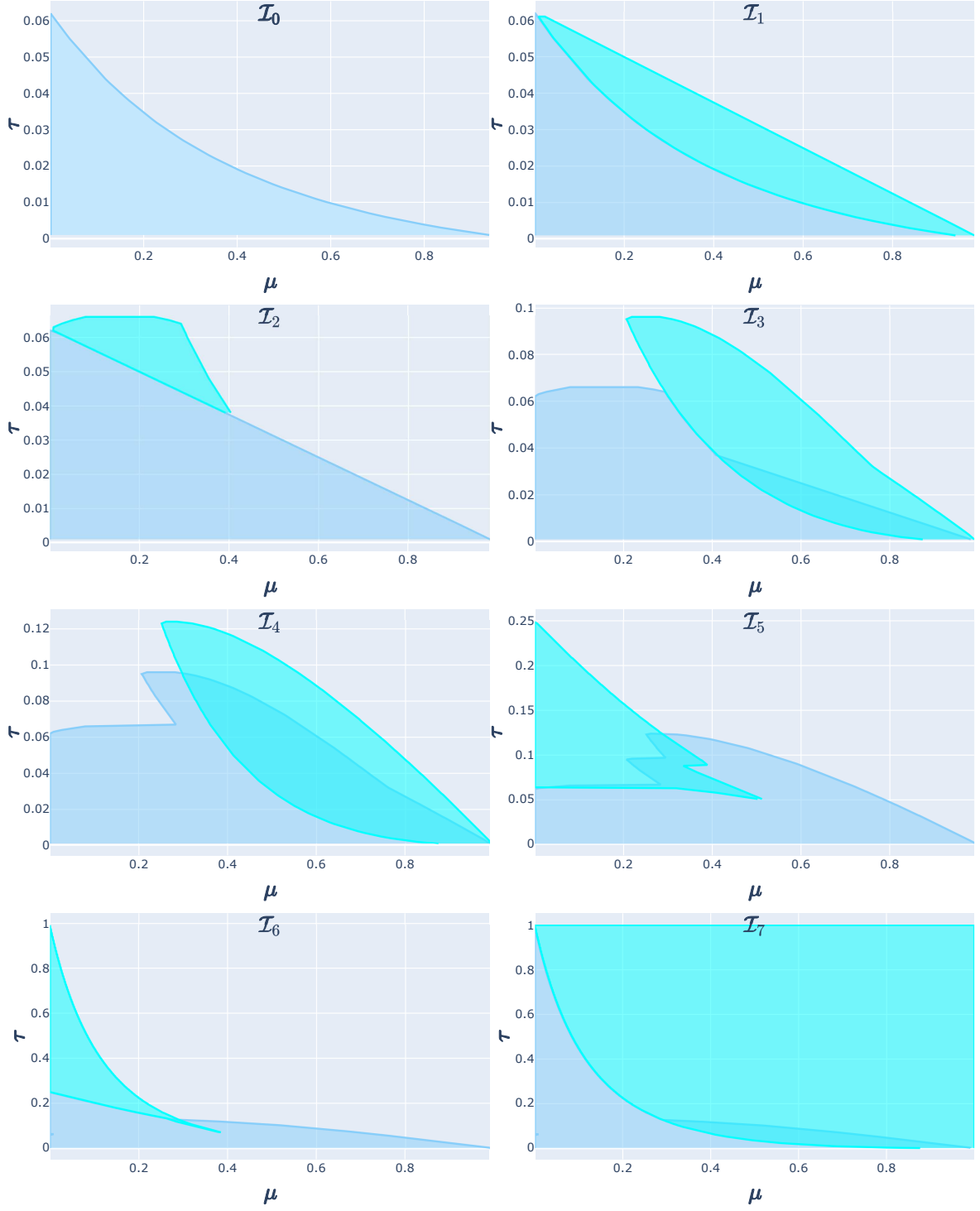
Fakat parametre değerleri arttıkça ya $\{2, 3, 4\}$ bileşeni tam ağa doğru genişleyerek bir klik oluşturacak ve denge davranışları birbirlerine daha da yakınsayacak ya da 1

²⁷ $\{1, 2, 3\}$ ve $\{3, 4, 5\}$ bileşenleri içerisinde tam ağ oluşmuştur. Diğer bileşenlerde iki kişi olduğu için iki kişi arasındaki bağlantı zaten tam ağdır.

²⁸3 bireyinin pozisyonu simetrik olduğundan denge davranışı kendi tipine eşit olacaktır: $x_3^* = \theta_3 = \frac{1}{2}$.

Şekil 5

$n = 5$ iken İkili Kararlı Ağların Parametre Değerleri



ve 5 bireyleri de $\{2, 3, 4\}$ bileşenine katılacaktır. İkinci durum için parametre değerleri artarak $\mathcal{I}_4$ ağlarına geldiğimizde ise tüm bireyleri iki bileşene bölünür. En uç tiplere sahip bireyler, 1 veya 5, yalnız iken geri kalan bireyler arasında bir klik kurulmuş olur.

Parametre değerlerinin artışı ile artık tüm toplum tek bir bileşende olacaktır. $\mathcal{I}_5$ ağlarındaki en aşağıdaki ağda tüm bireyler sadece bitişik bireylerle bağlantı içindedir. Daha sonra ise tipleri en yakın bireylerden başlamak üzere ikili kararlı ağlar tam ağa doğru genişleyecektir.

Ön seçim ve sosyalleşme etkilerini incelediğimiz modelde ikili kararlı ağların gösterildiği Şekil 4'dende görüleceği üzere bireyler tipleri kendilerine en yakın olan bitişik bireylerle arkadaşlık kurmaktadır. Bir bireyin tipi kendine en yakın olan bireyi atlayıp başka bir bireyle arkadaşlık kurduğu hiç bir ağ ikili kararlı değildir. Bu durum birbirleri ile arkadaş olan bireyler arasındaki benzerliklerin bireylerin kendi tercihleri ile oluştuğunu iddia eden ön seçim etkisinden kaynaklanmaktadır. Ayrıca bireyler bitişik bireylerle arkadaşlık kurduklarında sosyalleşme etkisinin ön gördüğü üzere denge davranışları kendi tiplerinden farklılaşacak ve birbirlerine yakınsayacaktır. Fakat gerek tolerans oranının artması ile gerekse de akran etkisinin gücünün artması ile bileşenler kendilerine en yakın bireylerle arkadaşlık kuracaktır. Bu aşamadan sonra iki türlü etki kendini göstermeye başlayacaktır. Bir yandan bileşenler arasındaki bağlantılar artacak ve bu bileşenler kendi aralarında tam ağ kurarak bir klik oluşturacak ya da bu bileşenlere en yakın bireyler ile bağlantı kurarak bileşen büyüyecektir. İlk durumda bileşenler arasındaki bağlantılar arttıkça ve bir klik oluşturmaya doğru gittikçe sosyalleşme etkisi gereği davranışlar birbirine yakınsayacak ve gözlenen benzerlikler artacaktır. Tabi ki toplumun birden fazla bileşene bölündüğü durumlarda ise bu bileşenlerin ortalama davranışları arasındaki fark ise artacaktır. Fakat Önerme 2'de gösterdiğimiz üzere bu farklar tüm toplumun ortalama davranışları üzerinde bir etkiye sebep olmayacaktır. Yani toplumun ortalama davranışları her zaman toplumun verili karakteristiklerini gösteren ortalama tipe eşit olacaktır. İkinci durumda ise bileşenler kendilerine en yakın bireylerle bağlantı kurarak büyüyecektir. En nihayetinde tüm toplum tek bir bileşende bulunacak ve artan tolerans etkisi veya artan akran etkisi ile ikili kararlı ağlar tam ağa doğru genişleyecektir.

3 Topluluklar Arası Risk Paylaşımı Ağları

İnsanlar gelirleri konusunda belirsizlikle karşı karşıyadır: Bir kişi işini kaybedebilir, kuraklık gibi kötü hava koşulları bir çiftçinin sahip olabileceği ürün miktarını olumsuz etkileyebilir, vb. İnsanların gelir belirsizliği ile başa çıkmasının bir yolu, karşı karşıya oldukları gelir risklerini bir araya getirip bu risklere karşı sigorta sunan resmi sigorta kurumlarıdır. Risk sevmeyen bireyler, tüketimlerini dengelemek ve gelir riskine karşı tam olarak sigortalanmak için risk primi ödemeye isteklidir. Resmi bir sigorta kurumu, gelir belirsizleri ile karşı karşıya olan bir çok insanın gelir risklerini bir araya getirip onlarla teşvik uyumlu ve uygulanabilir bir sözleşme¹ ile imzalayarak gelir belirsizliğini ortadan kaldıran kurumlardır. Ancak resmi bir sigorta kurumunun yokluğunda, insanlar genellikle gelirlerinin bir kısmını paylaşarak gelir riskini azaltmak için aile üyelerine, arkadaşlarına, tanıdıklarına güvenirler.

Özellikle kırsal ve çoğunlukla tarımla uğraşan bölgelerde gayri resmi risk paylaşım ağları üzerine yapılan ampirik çalışmalar, risk paylaşımının köy düzeyinde gerçekleşmediğini, bunun yerine aileler ve tanıdıklar arasında gerçekleştiğini ve bireylerin bir köy içindeki risk paylaşım ağları aracılığıyla riske karşı tam olarak sigortalanamayacağını öne sürmektedir².

Bu bölümde risk sevmeyen bireylerin gelirlerinde belirsizlikle karşı karşıya kaldığı bir ortamı ele alıyoruz. Bireyler farklı köylerde, adalarda veya topluluklarda yer almaktadır ve bir ağ aracılığıyla birbirlerine bağlıdır. Ağdaki bağlantılar aile bağlantıları³, farklı köylerdeki iş ortakları, vb. olarak yorumlanabilir. Bireylerin gelirlerindeki belirsizlikler ortadan kalktıktan ve bireyler gerçekleşen gelirlerini gördükten sonra, elde ettikleri geliri bir havuzda toplayıp ağdaki arkadaşlarıyla eşit olarak paylaşmaları, bu bölümde kullanağımız, gayri resmi risk paylaşımına bir örnek olarak verilebilir. Risk paylaşım ağındaki risk paylaşım mekanizması şu şekilde çalışır: Bireylerin gelirleri gerçekleştikten sonra, ağda birbirleriyle bağlı rastgele olarak seçilen birey çiftleri buluşur ve her buluştuklarında gelirlerini eşit olarak paylaşırlar.

¹Enformasyon asimetrisinin olmadığını varsayıyoruz.

²Güney Hindistan'daki köyler arasındaki risk paylaşımı üzerine Townsend (1994)'nın öncü çalışmasına bakınız. Ayrıca, kuzey Nijerya'daki kırsal bölgelerinde risk paylaşımı hakkında Udry (1995)'ya, Filipinler'in kırsal bölgelerindeki risk paylaşımı hakkında Fafchamps ve Lund (2003) ve Fafchamps ve Gubert (2007)'a, Tanzanya'daki bir köy içindeki risk paylaşımı hakkında Weerdt ve Dercon (2006)'ya ve Pakistan'daki haneler arasındaki kanal suyu ticareti hakkında Murgai, Winters, Sadoulet, ve de Janvry (2002)'a bakın.

³Örneğin, Rosenzweig ve Stark (1989), Güney Hindistan'da köyler arasındaki evliliğin riski azaltmanın bir yolu olduğunu kanıtlıyor.

Tüm birey çiftlerinin pozitif olasılıkla bir araya gelebileceği varsayıldığında, bireylerin geliri, bu sürecin tekrar sayısı sonsuza yakınsadıkça herhangi bir bileşende bulunan bireylerin gelirleri bu bileşenin ortalama gelirine yakınsar⁴. İncelenen paylaşım mekanizmasında bireyler arası transferlerde stratejik karar alma söz konusu değildir ve herhangi bir bilgi sorunu yaşanmamaktadır. Bireyler, bir araya geldiklerinde gelirlerini eşit olarak paylaşmaktan vazgeçmez veya gelirlerini gizleyemezler; bu, birbirlerini uzun zamandır tanıyan ve başkalarının gelirlerindeki dalgalanmaları bilen az sayıda insan arasında güçlü normların oluşturulduğu kırsal köylerle bu varsayımlar oldukça makuldür⁵.

Bireylerin karşı karşıya olduğu belirsizlik ile bir bireyin gelirinin yüksek y_H veya düşük y_L olabilmesi kastediyoruz. Aynı topluluktaki bireylerin gelirlerinin aynı olduğunu varsayıyoruz ve bir topluluktaki gelir eşit olasılıkla yüksek veya düşük olabilir. Bu varsayım, bir toplulukta ana gelir kaynağı olarak bir faaliyet varsa ve bu topluluktaki tüm bireyler aynı şekilde etkileniyorsa haklı çıkarılabilir. Aynı zamanda bu varsayımın anlamı, bireylerin kendi köylerindeki üyeler arasında gayri resmi bir risk paylaşım anlaşmasına dahil olmaları için hiçbir teşvik olmamasıdır; bu, bireylerin bir köy içinde riski paylaşarak tam sigortaya ulaşamayacaklarına dair ampirik kanıtların aşırı bir örneğidir. Ancak bu çalışmadaki odak noktamız farklı topluluklar arasındaki risk paylaşımı olduğu için bu varsayımda bulunduk.

Farklı toplulukların gelirleri arasındaki ilişkiye gelince, öncelikle farklı topluluklardaki gerçekleşen gelirler arasındaki mükemmel negatif korelasyonu ele alıyoruz, ancak daha sonra bu varsayımı, modelimizin farklı korelasyon seviyelerini kapsayacak şekilde gevşetiyoruz⁶.

Bireylerin risk sevmeyen bireyler olduklarını, yani beklenen fayda fonksiyonlarının gerçekleşen gelire göre kesin artan ve kesin içbükey olduğunu varsayıyoruz. Risk paylaşım ağlarının yokluğunda veya bir bireyin belirli bir risk paylaşım ağında hiçbir bağlantısı olmadığında, risk sevmeyen birey, gerçekleşen gelirin en düşük beklenen faydasına sahiptir. Risk sevmeyen bir birey için risk paylaşım ağının faydası, riskin çeşitlendirilmesi ve risk paylaşım mekanizması aracılığıyla gerçekleşen gelirdeki dalgalanmaları yumuşatarak gerçekleşen gelirin beklenen faydasının artmasıdır. Bir birey, iki topluluktan aynı sayıda bireye sahip dengeli bileşen adımı verdiğimiz bir

⁴Aynı risk paylaşım süreci Bramoullé ve Kranton (2007c)'de de ele alınmış ve gelirlerin yakınsamaları gösterilmiştir.

⁵Fafchamps ve Lund (2003)'deki ankete katılanların %85'inden fazlası, *tüm* kredi ortaklarının varlıkları ve demografik özellikleri hakkında eksiksiz bilgi verebildiğini göstermiştir.

⁶Risk paylaşım ağlarının, mükemmel negatif korelasyon varsaydığımızda bireylerin risk paylaşım ağları aracılığıyla tam sigortaya ulaşma olasılığının daha yüksek olduğunu gösteriyoruz. Bkz. kısım 3.5.

bileşene⁷ dahil olarak tam sigortaya sahip olabilir.

Risk paylaşım ağlarının faydaları riskten kaçınan bireyler için açık olsa da, bu bağlantıları kurmanın ve sürdürmenin maliyetli olabileceğini beklemek makuldür. Bağlantıların maliyetli olduğunu ve farklı topluluklardan iki birey arasındaki bağlantının maliyetinin aynı topluluktan iki birey arasındaki bağlantının maliyetinden daha yüksek olduğunu varsayıyoruz. Farklı topluluklar arasındaki bağlantılara topluluklar arası bağlantılar diyoruz ve c_H bu tür bağlantıların maliyetini temsil ediyor ve aynı topluluk içindeki bağlantılar topluluk içi bağlantılardır ve maliyet $c_L (< c_H)$ ile temsil ediliyor. Son olarak, belirli bir ağdaki bir bireyin faydası, risk paylaşım mekanizmasından sonra gerçekleşen gelirin beklenen faydası ve bireyin belirli ağdaki bağlantılarını sürdürme maliyetidir.

Farklı toplulukların gerçekleşen gelirleri ile toplulukların nüfusları aynı olduğu ve topluluklar arası gerçekleşen gelirlerde tam negatif korelasyon bulunduğu ölçüt modelde, verimli ve ikili kararlı ağlarının yapılarını inceliyor ve bu ağ yapılarını karşılaştırıyoruz. Ayrıca, boş ağdan başlayarak rastgele seçilen bir bağlantının, bağlantıya dahil olan iki birey için karşılıklı olarak faydalı bağlantılarsa kurulduğu ya da bir birey için faydalı ile silindiği, dinamik bir ağ oluşum sürecini de ele alıyoruz.

Ölçüt modelinde, öncelikle, verimli ağ kümesini karakterize ediyoruz⁸. Tüm verimli ağlarda, tüm bileşenlerin asgari bağlı olduğunu, yani bileşeni bir arada tutmak için gereken en az sayıda bağlantı sayısını içerdiğini gösteriyoruz⁹. Asgari bağlı bir ağda s bireyi olan bir bileşen için gerekli en az bağlantı sayısı $s - 1$ 'dir. Ayrıca, tüm bileşenlerde, topluluklar arası bağlantının maliyetinin topluluk içi bağlantının maliyetinden daha yüksek olması nedeniyle, $s - 1$ bağlantıdan tam olarak bir tane topluluklar arası bağlantı olduğunu gösteriyoruz.

Verimli ağlarda üç farklı ağ yapısının mümkün olduğunu gösteriyoruz¹⁰. Topluluklar arası ve topluluk içi maliyetler yeterince yüksek ise boş ağ tek verimli ağdır. Eğer topluluklar arası bağlantıların maliyetleri yeterince küçükse ve topluluk içi maliyetler ise topluluklar arası maliyetlere kıyasla yeterince büyükse ($2c_L > c_H$), her bireyin karşı topluluktan sadece bir arkadaşı olduğu tam eşleşme ağları verimli ağlardır¹¹. Eğer topluluk içi bağlantıların maliyeti, c_L , topluluklar arası bağlantının maliyetine kıyasla

⁷Böyle bir bileşende yukarıda tarif edilen risk paylaşım mekanizması sonucu gerçekleşen gelir sabit olacağı için bireylerin karşılaştığı risk tamamen ortadan kalkar.

⁸Verimli bir ağ, bireylerin toplam beklenen faydasını maksimize eden ağdır.

⁹Bir başka ifade ile, bir bileşen asgari bağlıysa, bileşendeki herhangi iki birey arasındaki herhangi bir bağlantıyı kaldırmanın bileşeni iki ayrı bileşene böldüğü anlamına gelir.

¹⁰Bkz. Önerme 8

¹¹Tam eşleşme ağlarındaki tüm bileşenler, farklı topluluklardan tam olarak iki bireye sahiptir.

düşükse¹², bir ağ ancak ve ancak asgari patika ağıysa verimlidir. Patika ağı, bireyleri yeniden adlandırarak bir sıraya koyabildiğimiz bir ağdır öyle ki yeniden adlandırmadan sonra birey 1 yalnızca 2 ile, 2 yalnızca 3 ile v.d. bağlantılıdır ve bu şekilde devam eder. Tüm olası patika ağları arasında tüm bağlantıların toplam maliyeti minimum olacak şekilde yalnızca bir adalar arası bağlantı varsa bu ağa asgari patika ağı¹³ denir.

Boş ağ hariç tüm verimli ağlarda, tüm bireyler dengeli bir bileşene ait olarak gelir riskine karşı tam sigortalıdır. Tam eşleştirmede, dengeli bileşenlerin sayısı bir topluluktaki birey sayısına eşit olur. Ancak, asgari bağlı bir ağda, her iki topluluğun tüm bireyinden oluşan tek bir dengeli bileşen vardır ve yalnızca iki birey arasında topluluklar arası bağlantı vardır.

Verimli bir ağ toplam refahı maksimize etse de, insanların bağlantı kurmaya veya bağlantıları kesmeye karar verdikleri bir durumda verimli ağların dengede olup olmadığı sorusu ortaya çıkar. Bu soruya cevap verebilmek için bir bireyin kendi faydasına olduğu durumda bağlantısını sonlandırabildiği ve bireylerin her ikisinin faydasına olduğu durumda bağlantılar kurabildiği durumları inceleyen ikili kararlı denge kavramını inceleyeceğiz.

Ölçüt modelde, ikili kararlı ağlar kümesi yukarıda bahsedilen üç çeşit verimli ağ yapılarının yanı sıra bazı diğer ağları içerir. Üç çeşit verimli ağ yapıları ikili kararlı olsa da, bunu sağlayan maliyet değerleri verimli ağlar için gerekli olan maliyet değerlerinden farklıdır. Örneğin, topluluklar arası bağlantının maliyeti tam sigortaya ulaşılarak elde edilecek olan fayda artışıyla büyükse, boş ağ tek ikili kararlı ağdır. Aksi durumda ise topluluk içi maliyetten bağımsız olarak tam eşleşmeler ikili kararlıdır. Tam eşleşmeler maliyetler $2c_L > c_H$ şartını sağladıklarında verimli ağlardı. Ayrıca eğer topluluk içi bağlantı maliyeti yeterince küçükse asgari patika ağları da iki kararlı olur. Bu üç tür verimli ağ yapısına ek olarak topluluklar arası bağlantıların maliyetleri yeterince küçükse tüm bileşenleri dengeli ve indirgenemez¹⁴ olan ağlar da ikili kararlıdır.

Son olarak, Jackson ve Watts (2002)'in dinamik ağ oluşma sürecini ele alıyoruz. Boş ağlardan başlayarak, herhangi bir turda, bir bağlantı rastgele seçilir ve bağlantıya dahil olan iki bireyin yararlıymısa eklenir ve bağlantıya dahil olan en az bir birey için yararlıysa silinir¹⁵. Bu süreç eğer ikili kararlı bir ağa ulaşırsa tanım gereği yeni bir bağlantı eklenmez veya var olan bir bağlantı silinmez. Böylece süreç bir ağda sonlanır

¹²Üç farklı ağ türlerinin verimli olması için gerekli olan maliyet değerlerinin bir gösterimi için Şekil 7'ye bakınız.

¹³Şekil 7'deki 2, 3 ve 4 örneklerine bakın.

¹⁴Dengeli bir bileşen, bileşendeki bir bağlantıyı kaldırarak iki dengeli bileşene bölünemiyorsa indirgenemezdir.

¹⁵Bağlantıların dinamik ağ oluşma sürecinde silinmesine izin verilmesine rağmen, Bölüm 3.4'te ele aldığımız dinamik risk paylaşım ağı oluşma sürecinde hiçbir zaman silinmiyorlar.

ve bu ağı *dinamik kararlı* ağ olarak adlandırırız. Boş ağın ikili kararlı ağ olduğu, $c_H > \bar{v} - \underline{v}$, durumda, dinamik süreç sırasında hiçbir bağlantı eklenmez ve silinmez ve sürecin boş ağı dinamik kararlı olduğunu söyleriz¹⁶. $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ olduğunda ise, tam eşleşmeler, asgari patika ağları ve diğer bazı ağlar ikili kararlı olduğunda, süreç yalnızca tam eşleşmelerde durur. Özetle, sadece boş ağ ve tam eşleşmeler tüm denge kavramlarını göre dengededir yani belirli maliyet değerleri için verimli, ikili kararlı ve dinamik kararlıdır.

Ölçüt modelin sonuçlarını ortaya koyduktan sonra ölçüt modelin iki genellemesini ele alıyoruz. Birincisinde, tam korelasyon varsayımını gevşetiyoruz. Eğer bir topluluğun gerçekleşen geliri düşükse diğer topluluğun gerçekleşen gelirinin düşük olma koşullu olasılığı $1 - p$ ve yüksek olma koşullu olasılığı p iken benzer bir şekilde bir topluluğun gerçekleşen geliri yüksekse diğer topluluğun gerçekleşen gelirinin düşük olma koşullu olasılığı p ve yüksek olma koşullu olasılığı $1 - p$ olduğunu varsayıyoruz¹⁷. Her toplulukta gelirin yüksek veya düşük olma olasılığının eşit olduğunu varsayımını koruyoruz. p değeri, farklı toplulukların gerçekleşen gelirleri arasındaki korelasyonu belirler. $p = 1$ olduğunda, tam negatif korelasyon durumuna geri döneriz. $p = 0$ tam pozitif korelasyon için geçerliken, $p = \frac{1}{2}$ farklı topluluklar arasındaki gerçekleşen gelirlerin birbirlerinde bağımsız olduğu anlamına gelir. $p < 1$ olduğunda, bir bireyin beklenen faydası, tam negatif korelasyona sahipken beklenen faydasının p katı ile sigortasız olmanın beklenen faydasının $1 - p$ katının toplamıdır. Yani, korelasyon tam negatif olmadığında, herhangi bir risk paylaşım ağından beklenen fayda azalır ve bireyler dengeli bir bileşende bile yalnızca kısmi sigorta elde eder. Bunun verimli ağlar kümesi, ikili kararlı ağlar ve dinamik kararlı ağlar üzerindeki etkisi, boş ağı verimli, ikili kararlı, dinamik kararlı olduğu c_L ve c_H değerlerini sağlayan bölgenin genişlemesi, diğer tüm verimli, ikili kararlı ve dinamik kararlı ağlar için maliyet bölgelerinin daralmasıdır. Uç durumda, $p = 0$ iken, tek verimli, ikili kararlı ve dinamik kararlı ağ, tüm maliyet değerleri için boş ağdır.

Son olarak, bir topluluğun daha fazla bireye sahip olmasına izin vererek toplulukların nüfuslarının aynı olduğu varsayımını gevşettik. Bu durumda, risk paylaşım ağlarına risk paylaşımı ile giderilemeyen toplam bir risk getirir. Yüksek nüfuslu topluluktaki ek bireylerin, tüm ikili kararlı ağlarda risk paylaşımına katılmadığını ve tam belirsizlikle karşı karşıya olduğunu gösteriyoruz. Ancak bazı maliyet değerleri için her iki topluluktaki tüm bireyleri kapsayan verimli ağlar vardır, ancak bu durumda dahi bireylerin elde edeceği sigorta yalnızca kısmi bir sigortadır.

¹⁶Sadece bir ikili kararlı ağ varsa, dinamik sürecin ikili kararlı ağda durduğunu biliyoruz.

¹⁷Bkz. Tablo 1

Gayri resmi risk paylaşım ağlarını inceleyen önceki teorik çalışmalar, genellikle tek bir topluluk içindeki risk paylaşım ağlarını ele alır. Örneğin, Bramoullé ve Kranton (2007c), bireylerin gelirlerinin bağımsız ve özdeş bir dağılımdan geldiği tek bir topluluk içindeki gayri resmi risk paylaşım ağlarını ele alır. Dinamik ağ oluşumunun yanı sıra verimli ve ikili kararlı ağları da incelerler. Kullandığımız risk paylaşım mekanizmamız¹⁸ ilk olarak Bramoullé ve Kranton (2007c) tarafından incelendi ve ağlar üzerinden risk paylaşımı yoluyla gerçekleşen gelirin bileşenin ortalama gelirine yakınsaması sonucunu ortaya koydu. Tek bir topluluk içerisinde risk paylaşımını inceledikleri için elde ettikleri tüm sonuçlar bileşenlerin büyüklüğü ile ilgilidir. Bazı verimli ağlarda bireylerin tam sigortaya sahip olabildiklerini, ancak bazı verimli ağlarda ise sadece kısmi sigortanın mümkün olduğunu göstermektedirler. İkili kararlı ağlar için, bileşenlerin boyutlarının genellikle verimli ağlardan daha az olduğunu ve farklı büyüklükteki bileşenlere ait bireyler arasında sigorta düzeyleri açısından asimetrisi olduğunu göstermektedirler. Buna karşılık, bizim modelimizde bireyler boş ağlar hariç, tam negatif korelasyon altında tüm verimli ve ikili kararlı ağlarda tam sigortaya ulaşmaktadır.

Aynı yazarlar, Bramoullé ve Kranton (2007b)'da aynı köydeki tüm bireyleri etkileyen köy düzeyinde bir şok ve özel durum şoku olmak üzere iki bağımsız gelir şoku aldığı gayri resmi bir risk paylaşım ağını ele alıyor. Her iki gelir şokunda sıfır ortalama ve pozitif varyanslı bağımsız ve özdeş dağılımdan geldiği varsayılmıştır. Makalenin bizim modelimizden bir diğer temel farkı, bir bireyin bileşeninin büyüklüğü arttıkça (aynı topluluktan veya farklı topluluktan bireyleri içermesi fark etmeksizin), bireyin beklenen faydasının arttığı ikinci dereceden fayda fonksiyonunu ele almalarıdır. Modelimizde beklenen fayda düzeyini belirleyen bileşenin büyüklüğü ve bileşimi değil, bileşendeki farklı topluluklardaki bireylerin görece ağırlıklarıdır. Daha açık bir ifadeyle, bir bireyin bileşenindeki farklı toplumlardaki birey sayıları arasındaki fark azaldıkça, o bireyin beklenen faydası artmaktadır. Bramoullé ve Kranton (2007b) iki özel ağ türü ele alıyorlar. Bu ağ türlerinden *tam-sigortalı-ayrışmış ağ* adını verdikleri ağlarda iki bileşen vardır; biri bir topluluktan tüm bireyleri içerirken diğeri diğer topluluktan tüm bireyleri içerir. Diğer ağ türünde ise üç bileşen bulunmaktadır: Biri bir topluluktan k bireyi içerir, diğeri diğer topluluktan k bireyi içerir ve son bileşen ise topluluklar arası yalnızca bir

¹⁸Teorik çalışmalarda bizim modelimizden ve Bramoullé ve Kranton (2007c)'den farklı olan başka bir yöntemde bireylerin ağlardaki arkadaşlarına gelir transferleri konusunda stratejik karar verdiği risk paylaşım mekanizmalarıdır. Diğer benzer örnekler için bkz. Ambrus, Mobius, ve Szeidl (2012), Bloch, Genicot, ve Ray (2008), Karlan, Mobius, Rosenblat, ve Szeidl (2009), Miller ve Ali (n.d.) ve Dutta, Ghosal, ve Ray (2005).

bağlantıya sahip olup her iki topluluktan kalan bireyleri içerir. Bu ağların ikili kararlı olduğu bağlantı maliyetleri değerlerini incelerler ve bazı bağlantı maliyeti için her iki ağ türünün de ikili kararlı olduğunu gösterirler. Ayrıca bu ağların verimli olması için bağlantı maliyetlerindeki koşulları da incelerler. Bizim çalışmamızda ise verimli ve ikili kararlı ağların tam karakterizasyonunu sağlıyoruz.

Bölüm 3.1’de, aynı nüfus ve tam negatif korelasyona sahip ölçüt modelini sunuyoruz. Bölüm 3.2’de, verimli ağları ve Bölüm 3.3’de ikili kararlı ağları karakterize ediyoruz. Bölüm 3.4’te ise, dinamik bir ağ oluşum sürecini ele alıyoruz. 3.5 bölümünde, farklı topluluklar arasındaki gerçekleşen gelirlerin mükemmel korelasyon varsayımını esnettiğimiz ölçüt modelin ilk genellemesini ele alıyoruz. 3.6 bölümü, bir topluluğun nüfusunun diğerinden daha yüksek olduğunu varsayarak toplam riski ortaya koyuyor. Toplam risk altında ikili kararlı ağları (Bölüm 3.6.1) ve verimli ağları (Bölüm 3.6.2) gösteriyoruz. Tüm kanıtlar ekte yer almaktadır.

3.1 Model

3.1.1 Ağlar

$N = \{1, \dots, 2n\}$, $2n$ bireyin yer aldığı birey kümesini gösterebilir. Risk paylaşım ağı, $g_{ij} = 1$ ($g_{ij} = 0$) ifadesinin i ve j bireyleri arasında bir bağlantının var olduğu (var olmadığı) anlamına geldiği $2n \times 2n$ büyüklüğünde bir matris $\mathbf{g} \in \{0, 1\}^{2n \times 2n}$ ile temsil edilir. Bağlantıların yönlü olmadığını, yani $g_{ij} = 1 \iff g_{ji} = 1$ olduğunu ve ij ’nin i ve j bireyleri arasındaki bir bağlantıyı ifade ettiğini varsayıyoruz. Tüm ağların kümesini $\mathcal{G}$ ile gösteriyoruz.

A ve B olmak üzere iki farklı toplulukta bulunan $2n$ bireyden ilk n birey A topluluğunda, $n + 1$ ’den $2n$ ’e kadar olan bireyler ise B topluluğunda yer almaktadır. $N^A = \{1, \dots, n\}$ ve $N^B = \{n + 1, \dots, 2n\}$ sırasıyla A ve B topluluklarındaki bireylerin kümeleridir. $i \in N^A$ ve $j \in N^B$ ise ij bağlantısına *topluluklar arası bağlantı*, $i, j \in N^A$ veya $i, j \in N^B$ ise ij bağlantısına *topluluk içi bağlantı* denir.

$N_i(\mathbf{g}) = \{j \in N : g_{ij} = 1\}$, $\mathbf{g}$ ağındaki i ’nin bağlantılarını gösterir ve i ’nin komşuları olarak adlandırılır. $N_i^A(\mathbf{g}) = N_i(\mathbf{g}) \cap N^A$, A topluluğundan i ’nin komşuları ve $N_i^B(\mathbf{g}) = N_i(\mathbf{g}) \cap N^B$, B topluluğundan i ’nin komşularıdır. $d_i(\mathbf{g})$, i bireyinin $\mathbf{g}$ ağındaki derecesi olarak adlandırılır ve $\mathbf{g}$ ağındaki i bireyinin bağlantılarının sayısını gösterir: $d_i(\mathbf{g}) = |j \in N : g_{ij} = 1|$. $d_i^A(\mathbf{g}) = |j \leq n : g_{ij} = 1|$, i ’nin A topluluğundan bireylerle bağlantı sayısını ve $d_i^B(\mathbf{g}) = |n + 1 \leq j \leq 2n : g_{ij} = 1|$, i ’nin B topluluğundan bireylerle bağlantı sayısını temsil eder.

3.1.2 Patika ve Bileşen

Eğer $i_0 = i$ ve $i_K = j$ ve $k = 0, \dots, K - 1$ için $g_{i_k i_{k+1}} = 1$ olacak şekilde $\{i_0, \dots, i_K\}$ bireyler dizisi varsa, i ile j arasında K uzunluğunda bir patika vardır. $g_{ij} = 1$ ise i ve j bireylerinin *doğrudan bağlantılı* olduğunu, $g_{ij} = 0$ ve i ve j 'yi birbirine bağlayan sonlu uzunlukta bir patika varsa *dolaylı bağlantılı* olduğunu söyleriz. Aksi halde, iki bireyi birbirine bağlayan bir patika yoksa i ve j bireylerinin *bağlantısız* olduğunu söyleriz.

$S \subseteq N$ kümesi ve $\mathbf{g}$ ağı verildiğinde, $\mathbf{g}|_S$ alt ağı olarak isimlendirilir ve $\mathbf{g}$ ağının S kümesine sınırlandırılmasıyla elde edilir.

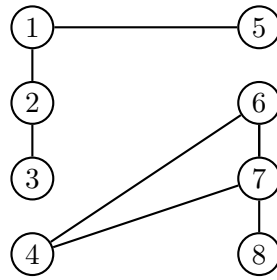
$$[\mathbf{g}|_S]_{ij} = \begin{cases} 1 & i, j \in S, g_{ij} = 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi türlü} \end{cases}$$

Matris gösteriminde, $\mathbf{g}|_S$, $\mathbf{g}$ 'nin bir asal alt matrisidir.

Verilen bir ağ $\mathbf{g}$ için, $S(\mathbf{g}) \subseteq N$ *bileşeni*, N kümesinin öyle bir altkümesidir ki (i) $S(\mathbf{g})$ içindeki herhangi bir i, j için sonlu uzunlukta bir yol vardır ve (ii) $S(\mathbf{g})$ içindeki herhangi bir $i \in S(\mathbf{g})$ ile herhangi bir $j \notin S(\mathbf{g})$ arasında yol yoktur. $S(\mathbf{g}) = \{S_1, \dots, S_k\}$ 'nın esasen N 'nin bir parçalanması olan bileşenlerin kümesi temsil eder: $\cup_{i=1}^k S_i = N$ ve $S_i \cap S_j = \emptyset$. Şekil 6'da iki tane bileşen vardır: $S_1 = \{1, 2, 3, 5\}$, $S_2 = \{4, 6, 7, 8\}$.

Şekil 6

Bileşenleri $\{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6, 7, 8\}$ Olan Bir Ağ



Bir bileşen S için, $S^A = S \cap N^A$ ile A topluluğundaki bireylerinin kümesini ve $S^B = S \cap N^B$ ile B topluluğundaki bireylerin kümesini gösterebiliriz. $s = |S|$, $s^A = |S^A|$, $s^B = |S^B|$, sırasıyla S bileşeninin büyüklüğünü, bileşendeki A topluluğundan olan bireylerin sayısını ve bileşendeki B topluluğundan olan bireylerin sayısını gösterir.

Eğer hiçbir bağlantısı olmayan bir birey i varsa, o zaman $S = \{i\}$ bir bileşendir ve *sıradan* bileşen olarak adlandırılır. Eğer $|S| \geq 2$ ise S bileşenine *sıradan-olmayan*

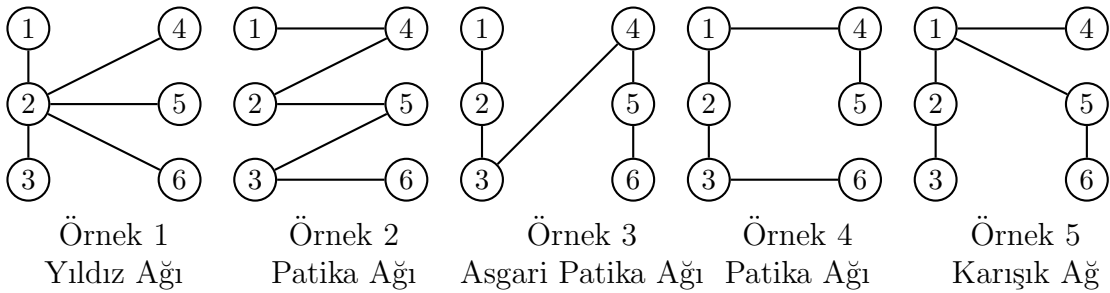
bileşen denir. Bir bileşende A ve B topluluklarından aynı sayıda birey varsa, yani $s^A = s^B$ ise, bu bileşene *dengeli* bileşen denir. Dengeli bir bileşen tanım gereği sıradan-olmayan bileşendir. Eğer herhangi bir S bileşeni için $s^A \neq s^B$ ise, S bileşenine *dengesiz* bileşen denir. Bir $\mathbf{g}$ sosyal ağının tüm bileşenleri $S \in \mathcal{S}(\mathbf{g})$ en fazla iki bireye sahip ise ve boyutu 2 olan tüm bileşenlerin her topluluktan bir birey içeriyorsa bu ağlara *eşleşme* denir ve $\mathbf{g}$ yerine $\mathbf{m}$ ile gösterilir: tüm $S \in \mathcal{S}(\mathbf{m})$ için, $|S| \leq 2$ ve $S = \{i, j\}$ ise, ij topluluklar arası bağlantıdır. Ayrıca, bir eşleşmenin her bileşenlerinin boyutu 2 ise, buna *tam eşleşme* diyoruz.

Herhangi bir $i \in N$ için, notasyonda ufak bir hata yaparak¹⁹, $S_i(\mathbf{g}) \subset N$ ile i 'nin ait olduğu bileşeni tanımlarız: $S_i(\mathbf{g}) = \{S(\mathbf{g}) \in \mathcal{S}(\mathbf{g}) : i \in S(\mathbf{g})\}$. $S_i^A(\mathbf{g})$ bileşeni $S_i(\mathbf{g})$ 'deki, A topluluğunda bulunan bireylerin kümesi olsun ve $S_i^B(\mathbf{g})$ bileşeni $S_i(\mathbf{g})$ bileşeni B topluluğunda bulunan bireylerin kümesi olsun. Şekil 6'da $S_{i=1}(\mathbf{g}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S_{i=1}^A(\mathbf{g}) = \{1, 2, 3, 4\}$ and $S_{i=1}^B(\mathbf{g}) = \{5\}$ olur. $s_i(\mathbf{g})$, $s_i^A(\mathbf{g})$, $s_i^B(\mathbf{g})$ sırasıyla i bireyi içeren bileşenlerin büyüklükleri, bu bileşendeki A topluluğundaki birey sayısı ve bu bileşendeki B topluluğundaki birey sayısı olsun. Aynı bileşende bulunan herhangi bir i, j için, $S_i(\mathbf{g}) = S_j(\mathbf{g})$, $S_i^A(\mathbf{g}) = S_j^A(\mathbf{g})$ ve $S_i^B(\mathbf{g}) = S_j^B(\mathbf{g})$ olur.

İki birey i ve j arasındaki bir bağlantı, eğer kaldırıldığında i ve j 'nin ait olduğu bileşenler değişmiyorsa *gereksiz* olarak adlandırılır. Şekil 6'da, 4 ile 6, 4 ile 7 ve 6 ile 7 arasındaki bağlantılar gereksizdir, çünkü bunlardan herhangi birini kaldırmak, bireylerin ait olduğu $\{4, 6, 7, 8\}$ bileşenini değiştirmez. $\{1, 2, 3, 5\}$ bileşeninde gereksiz olan bir bağlantı yoktur. *Asgari bağlı* bileşen, herhangi bir gereksiz bağlantı içermeyen bileşendir. Şekil 6'da, $\{1, 2, 3, 5\}$ asgari bağlı bir bileşen iken $\{4, 6, 7, 8\}$ değildir. Şekil 7'de 6 bireyden oluşan asgari bağlı bileşenlerin daha fazla örnekleri bulunmaktadır.

Şekil 7

Asgari Bağlı Bileşenler



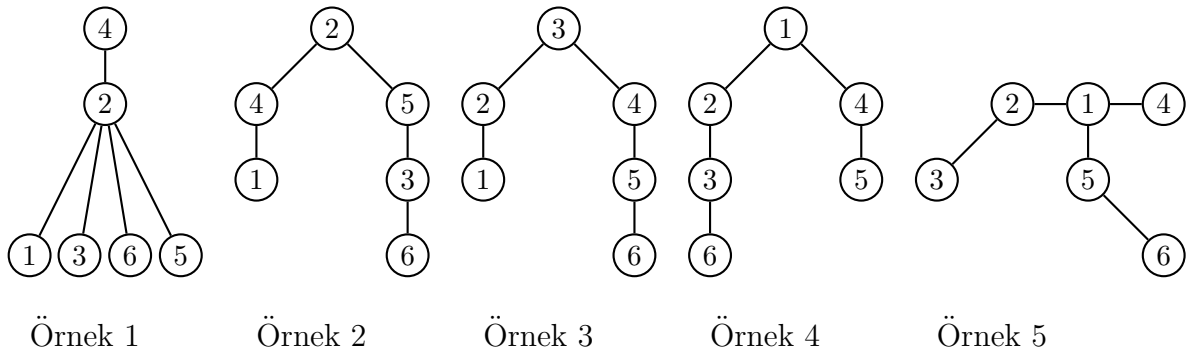
¹⁹Bireyler 1'den $2n$ 'ye kadar rakamlarla gösterildiğinden, bu durum notasyonda bir karışıklığa yol açar. Bu bölüm boyunca, S 'nin alt simgesi bir sayı olduğunda, genel bir bileşene atıfta bulunuruz ve alt simge bir harf olduğunda, alt simgede bireyi içeren bileşene atıfta bulunuruz. Bileşen 1'in ait olduğu anlamına geldiğinde $S_{i=1}(\mathbf{g})$ yazarak karışıklığı önlemeye çalışacağız.

Şekil 7'deki örnek 1 yıldız ağına²⁰, örnek 2, 3, 4 patika ağlarına²¹ bir örnektir. Örnek 5 ise kısmen yıldız ağı kısmen de patika ağı özelliklerini²² gösteren karışık bir ağıdır. Bir patika ağının, topluluklar arası tek bir bağlantısı olan tek bir bileşeni olduğunda buna *asgari patika ağı* denir.

s boyutundaki asgari bağlı bir bileşende $s - 1$ bağlantı olacaktır. Örnek 2'de tüm bu bağlantılar topluluklar arası bağlantılar iken, örnek 3'te yalnızca 1 topluluklar arası bağlantı vardır. Ayrıca, asgari bağlı bir bileşende, derecesi 1 olan en az iki birey vardır²³ ve herhangi iki birey arasında, onları birbirine bağlayan tek bir patika vardır. Her asgari bağlı bileşen aynı zamanda bir ağaç şeması ile gösterilebilir ve ağacın kökü herhangi bir birey olabilir. Aşağıdaki Şekil 8'de yukarıdaki ağ örneklerinin ağaç şeması gösterimleri bulunmaktadır. Örnek 5' için ağaç şeması gösteriminde ağacın kökü belirtilmeden çizilmiştir. Son olarak, asgari bağlı bir bileşene bir bağlantı eklemek bir döngü yaratır ve asgari bağlı bir bileşenden bir bağlantıyı kaldırmak, gereksiz bir bağlantı olmadığından bileşeni iki bileşene böler.

Şekil 8

Asgari Bağlı Bileşenlerin Ağaç Şeması Gösterimi



Dengeli bir S bileşenine, $i, j \in S$ arasında bir bağlantı varsa ve bu bağlantı kaldırıldığında S bileşeni iki dengeli bileşene bölünüyorsa *indirgenebilir* adını veririz; aksi takdirde S 'nin *indirgenemez* olduğunu söyleriz. Şekil 7'deki örnek 4 indirgenebilirdir çünkü 2 ile 3 arasındaki bağın kaldırılması bileşeni iki dengeli

²⁰Bir yıldız ağında, merkezde herkesle bağlantılı olan bir birey (örneğin 2) vardır ve merkezdeki birey dışındaki herhangi iki birey, merkezi birey aracılığıyla dolaylı olarak bağlantılıdır.

²¹Bir ağ $\mathbf{g}$, bu ağdaki tüm bağlantılar $k = \{1, \dots, n-1\}$ için $g_{b^{-1}(k), b^{-1}(k+1)} = 1$ olarak yazılabildiği birebir örten bir fonksiyon $b : N \rightarrow N$ varsa bir patika ağıdır. Patika ağının en basit örneği, $b(i) = i$ olan 7'deki 3 ağıdır, ancak 2 ve 4 örnekleri için bir birebir örten (bireyleri yeniden adlandıran) fonksiyon bulabilir ve böylece bireylerin adları birebir örten fonksiyon yoluyla değiştirildiğinde örnek 3 ile aynı hale gelirler. Bu nedenle, 2 ve 4 örneklerindeki ağlar da patika ağlarıdır.

²² $\{1, 2, 4, 5\}$ arasındaki bağlantılar yıldız ağına, $\{1, 2, 3, 4\}$ ile $\{1, 5, 6\}$ arasındaki bağlantılar ise yol ağına benzemektedir.

²³İspat için ekteki Lemma 24'ye bakınız.

bileşene böler: $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3, 6\}$. Şekil 7'deki diğer tüm bileşenler indirgenemezdir. Ayrıca bir eşleşmedeki tüm bileşenler indirgenemez bileşenlerdir ve tam eşleşmede n indirgenemez bileşen vardır ki n aslında bir ağda sahip olabileceğimiz en yüksek indirgenemez bileşen sayısıdır.

3.1.3 Risk Paylaşım Mekanizması

Her bireyin $y_i > 0$ gerçekleşen gelirinin yüksek ya da düşük olabileceğini varsayıyoruz: $y_H > y_L$ olmak üzere $y_i \in \{y_L, y_H\}$. Ayrıca topluluklar arası gelirlerin tam negatif korelasyonlu olduğunu, yani tüm $i \in \{1, \dots, n\}$ ve tüm $j \in \{n+1, \dots, 2n\}$ için $y_i = y_L \Leftrightarrow y_j = y_H$ olduğunu varsayıyoruz. Her iki toplumdaki bireyler eşit olasılıkla düşük veya yüksek gelirle karşı karşıya kalabilirler. Ancak aynı topluluktaki bireylerin gelirleri farklı değildir. $\bar{y} = \frac{1}{2}y_H + \frac{1}{2}y_L$ ortalama gerçekleşen geliri gösterebilir.

Bireylerin gelirlerini $\mathbf{g}$ ağı aracılığıyla paylaştıkları bir gelir paylaşım mekanizmasını inceleyeceğiz. Her iki toplumdaki bireylerin gelirleri gerçekleştiğinde, rastgele seçilen bireyler ağdaki partnerleriyle bir araya gelirler ve her bir araya geldiklerinde gerçekleşen gelirlerini eşit olarak paylaşmayı taahhüt ederler. Bu rastgele bir araya gelişlerin tekrarlandığını ve herhangi birey çiftinin seçilme olasılığının pozitif olduğunu varsayıyoruz. Yukarıdaki mekanizmanın nasıl işlediğini görmek için, A topluluğundaki gelirlerin y_H ve B topluluğundaki gelirlerin y_L olduğunu varsayalım. Şekil 7'deki 3 ağı ele alalım. Gelir paylaşımı yalnızca farklı topluluklardan birey çiftleri bir araya geldiğinde olacaktır. Bu çift, 3 ağdaki 3 ve 4 bireyleridir. Bir araya geldikten sonra gelirleri $\bar{y}$ olacaklardır. Diyelim ki bir sonraki adımda, 3 bireyi 2 bireyiyle bir araya geliyor ve gelirlerini paylaşıyor. Bu durumda gelirleri artık $\frac{y_H + \bar{y}}{2}$ olacaktır. Gelir paylaşım mekanizmasındaki adımlar devam ettikçe ve birey çiftleri birbirleriyle yeterince sık karşılaştıkça, ağdaki herhangi bir bileşenindeki bireylerin gelirleri ait oldukları bileşenin ortalama gelirine yakınsar. Limitte, gelir paylaşım mekanizması sanki her bileşendeki bireyler gelirlerini bir araya getirip bileşenin toplam gelirini eşit olarak paylaştığı duruma denk olur. Yukarıda açıkladığımız gelir paylaşım mekanizması Bramoullé ve Kranton (2007c) çalışmasındaki mekanizmaya benzer. Bramoullé ve Kranton (2007c) çalışmasındaki 1 önermesi, süreç sonsuza yakınsadığında, bir ağdaki her bireyin gelirinin bu gelir paylaşım mekanizması sonunda bileşenindeki ortalama gelir düzeyine yakınsadığını gösterir. Bireyler bir araya geldiklerinde gelirlerini paylaştıkları için şu ana kadar yukarıdaki mekanizmayı gelir paylaşımı olarak adlandırsakta bizim çalışmamızın bağlamında bireyler risk paylaşımı yapmaktadır. Dolayısıyla bundan sonra gelir paylaşımı yerine risk paylaşımı ifadesini kullanacağız.

Ağda risk paylaşımından sonra, bir bileşendeki bireyin geliri, bileşendeki farklı topluluktan bireylerin göreceli büyüklüklerine yani s^A ile s^B büyüklüklerine ve hangi topluluğun düşük veya yüksek gelirle karşı karşıya olduğuna bağlıdır. Eğer A topluluğu yüksek bir gelire sahipse, risk paylaşımından sonra bileşen S' 'deki tüm bireylerin gelirleri

$$\frac{s^A y_H + s^B y_L}{s}$$

ve eğer B topluluğu yüksek bir gelire sahipse, bileşen S' 'deki tüm bireylerin gelirleri

$$\frac{s^A y_L + s^B y_H}{s}$$

olur.

Her toplumun gerçekleşen gelirin yüksek veya düşük olması eşit olasılıkla gerçekleştiğinden ve toplumlar arasında gerçekleşen gelirler tam negatif korelasyona sahip olduğundan, risk paylaşımından sonra $S(\mathbf{g})$ bileşenine ait olan tüm i bireylerinin $\hat{y}_i(\mathbf{g})$ beklenen geliri aşağıdaki ifadeye eşittir:

$$\hat{y}_i(\mathbf{g}) = \frac{1}{2} \frac{s_i^A(\mathbf{g}) y_H + s_i^B(\mathbf{g}) y_L}{s_i(\mathbf{g})} + \frac{1}{2} \frac{s_i^A(\mathbf{g}) y_L + s_i^B(\mathbf{g}) y_H}{s_i(\mathbf{g})} = \bar{y} \quad (3.1)$$

Bu ifade de toplama işaretinden önceki terim, A topluluğunun geliri yüksek olduğundan $S_i(\mathbf{g})$ bileşenindeki i bireyinin beklenen gelirini gösterirken, sonraki terim ise B topluluğunun yüksek gelir elde ettiği durumda $S_i(\mathbf{g})$ bileşenindeki i bireyinin beklenen gelirini gösterir. Birey i 'nin beklenen gelirin risk paylaşımından sonraki ortalama gelire eşit olduğu ve birey i 'nin beklenen gelirin bireyin bileşendeki pozisyonundan bağımsız olduğu fark edilebilir. Nitekim, aynı bileşendeki her bireyin beklenen geliri de aynıdır.

Ağlar üzerinden risk paylaşımı ile ilgili literatürde farklı risk paylaşım mekanizmaları da vardır. Örnek olarak, Ambrus vd. (2012) farklı topluluklarda bulunan bireyler arasındaki stratejik transfer kararlarını ele alır. Modelimizdeki risk paylaşım mekanizmasının stratejik bir yönü yoktur. Bireylerin risk paylaşım mekanizmasında bir araya geldiklerinde gelirlerini arkadaşlarıyla eşit olarak paylaşmaya kararlı olduklarını ve gelirlerini gizleyemediklerini veya gelirlerini paylaşmayı reddetmediklerini varsayıyoruz.

Bireylerin $\mathbf{g}$ risk paylaşım ağında beklenen gelirlerine göre kesin artan ve kesin içbükey bir $v(y)$ fayda fonksiyonu olduğunu varsayıyoruz. Bireylerin beklenen faydası

aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$EU_i(\mathbf{g}) = \frac{1}{2}v\left(\frac{s_i^A(\mathbf{g})y_H + s_i^B(\mathbf{g})y_L}{s_i(\mathbf{g})}\right) + \frac{1}{2}v\left(\frac{s_i^A(\mathbf{g})y_L + s_i^B(\mathbf{g})y_H}{s_i(\mathbf{g})}\right) \quad (3.2)$$

Birey i 'nin beklenen faydası, ait oldukları bileşendeki s_i^A ve s_i^B 'nin göreceli boyutlarına bağlıdır. Dengeli bir bileşende, yani $s_i^A = s_i^B$ iken, i bireyinin risk paylaşımından sonra gelirinde herhangi bir belirsizlik kalmaz, çünkü hangi topluluğun yüksek gelire sahip olduğundan bağımsız olarak, birey i 'nin geliri $\bar{y}$ ortalama gelire eşittir. Bu durumda, i bireyi v 'nin kesin içbükeyliği nedeniyle en yüksek beklenen faydaya ulaşır. Bu gözlemi daha net ifade etmek için, 3.1 denklemindeki i bireyinin beklenen geliri şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$\Delta = \frac{|s^A - s^B|}{s^A + s^B} (\bar{y} - y_L) = \frac{|s^A - s^B|}{s^A + s^B} (y_H - \bar{y})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(\mathbf{g}) &= \frac{1}{2} \left(\bar{y} - \frac{|s^A - s^B|}{s^A + s^B} (\bar{y} - y_L) \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{y} + \frac{|s^A - s^B|}{s^A + s^B} (y_H - \bar{y}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{y} - \Delta) + \frac{1}{2} (\bar{y} + \Delta) = \bar{y} \end{aligned}$$

Dengeli bir bileşende $\Delta = 0$ olur ve gelir riski risk paylaşımı yoluyla tamamen ortadan kaldırılır. Dengeli bir bileşende i bireyinin beklenen faydası $E_i(\mathbf{g}) = v(\bar{y})$ 'ye eşittir. Öte yandan, beklenen fayda bir bireyin hiç bağlantısı olmadığında (sıradan bileşende) veya bir birey yalnızca bir topluluktan bireyler içeren bir bileşende olduğunda en düşüktür. Bu durumda ise beklenen fayda $\frac{1}{2}v(y_H) + \frac{1}{2}v(y_L)$ 'ye eşittir. En yüksek beklenen faydayı $\bar{v} = v(\bar{y})$ ile ve en düşük beklenen faydayı $\underline{v} = \frac{1}{2}v(y_H) + \frac{1}{2}v(y_L)$ ile gösteriyoruz. Bir bireyin beklenen faydasını hesaplamak için ihtiyaç duyduğumuz tek bilgi, ait olduğu bileşendeki A topluluğundan ve B topluluğundan olan bireylerin sayısı olduğundan, $p = s_i^A(\mathbf{g})$ ve $q = s_i^B(\mathbf{g})$ olmak üzere $EU_i(\mathbf{g})$ 'yi ifade etmek için $EU_i(p, q)$ yazabiliriz.

Bireyler ağ üzerinden risk paylaşımından faydalansa da, bu bağlantıları oluşturma ve sürdürmenin maliyetli olduğunu da varsayıyoruz. Her bir bağlantıyla ilişkili bu maliyeti, iki birey arasında gelir transferinin maliyeti veya gelirin bir kısmının iki topluluk arasında veya aynı topluluk içinde paylaşılırken kaybolması olarak da yorumlanabilir. Gelir transferinin veya bağlantıların maliyetinin, farklı topluluklar arasında paylaşıldığında aynı topluluk içinde paylaşıldığından daha yüksek olduğunu varsayıyoruz. Aynı topluluktan iki birey arasındaki bir bağlantının

maliyetini c_L olarak ve farklı topluluklar arasında bir bağlantıyı sürdürmenin maliyetini c_H olarak gösteriyoruz ve $c_H > c_L$ olduğunu varsayıyoruz. Dolayısıyla i bireyinin $\mathbf{g}$ ağında bağlantılarının toplam maliyeti şu şekilde yazılabilir.

$$C_i(\mathbf{g}) = \begin{cases} d_i^A(\mathbf{g})c_L + d_i^B(\mathbf{g})c_H, & \text{eğer } i \in N^A \\ d_i^A(\mathbf{g})c_H + d_i^B(\mathbf{g})c_L, & \text{eğer } i \in N^B \end{cases} \quad (3.3)$$

Son olarak, $\mathbf{g}$ risk paylaşım ağındaki i bireyinin net beklenen faydası, ağ üzerinde risk paylaşımı sonrası elde edilen beklenen faydadan toplam bağlantı maliyetinin çıkarılmasıyla elde edilen değere eşittir:

$$U_i(\mathbf{g}) = EU_i(\mathbf{g}) - C_i(\mathbf{g}) \quad (3.4)$$

3.2 Verimli Ağlar

Bu bölümde, verimli risk paylaşım ağlarını ele alacağız. Verimli ağ toplam faydanın maksimize edildiği ağdır. Tam bir tanım vermek gerekirse, $W(\mathbf{g})$

$$W(\mathbf{g}) = \sum_{i \in N} U_i(\mathbf{g})$$

olmak üzere, $\mathbf{g}$ ağı, $W(\mathbf{g}') > W(\mathbf{g})$ olacak şekilde başka bir $\mathbf{g}'$ ağı yoksa *verimlidir*.

Aşağıdaki lemma verimli bir ağda gereksiz bağlantı olmadığını gösterir. Bir bireyin beklenen faydasının ait olduğu bileşendeki bağlantının yapısına değil, farklı topluluklardaki bireylerin göreceli büyüklüklerine bağlı olduğundan, bir bileşendeki gereksiz bir bağlantıyı silerek, bireyler aynı bileşene ait kalır ve bileşendeki her bireyin beklenen faydası aynı kalırken, bileşenlerdeki tüm bağlantıların maliyeti, gereksiz bağlantı topluluklar arası bağlantıysa $2c_H$, topluluk içi bağlantıysa $2c_L$ kadar azalır. Dolayısıyla her hangi bir ağdaki bileşenlerde gereksiz bir bağlantı varsa o ağ verimli olamaz.

Lemma 6 *Verimli bir ağda gereksiz bağlantı yoktur.*

Yukarıdaki lemmanın sonucu, verimli bir ağdaki tüm bileşenlerin asgari bağlantılı olmasıdır. Bir sonraki lemmada, verimli bir risk paylaşım ağında, tüm sıradan olmayan bileşenlerin her iki topluluktan da bireyler içerdiğini gösteriyoruz. Başka bir deyişle, verimli bir ağda, aynı topluluktan olan bireylerden oluşan sıradan olmayan bir bileşen yoktur, çünkü bu tür bileşenlerdeki tüm bireylerin beklenen faydaları, bu bireylerin hiç arkadaşları olmadığında beklenen faydaları olan $\underline{v}$ değerine eşittir. Bu nedenle, yalnızca

bir topluluktan bireyler içeren bir bileşendeki tüm topluluk içi bağlantılarını silersek beklenen fayda değişmezken maliyetler azaldığından toplam net fayda artar. Ayrıca, verimli bir ağın tüm sıradan olmayan bileşenlerinde tam olarak bir topluluklar arası bağlantı vardır. Bunu görmek için de, verimli bir ağda $s^A, s^B > 0$ olan sıradan olmayan bir bileşen S düşünün. Lemma 6'dan dolayı bileşende $s - 1$ tane bağlantı olduğunu biliyoruz. $c_H > c_L$ olduğundan, $s - 1$ bağlantının maliyeti en aza indiren durum topluluklar arasında yalnızca bir bağlantı olacak şekildedir. Öyleyse bu bileşendeki toplam maliyet $(s - 2)c_L + c_H$ 'ye eşittir. Son olarak aşağıdaki lemmada, verimli bir ağın sıradan bileşenlerinin hepsi, $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ olduğunda aynı topluluktan olduğunu da göstereceğiz.

Lemma 7 *Verimli bir ağda, sıradan olmayan tüm bileşenler her iki topluluktan da bireyler içerir ve yalnızca bir topluluklar arası bağlantısı vardır. Dahası, $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ olduğunda, sıradan bileşenlerin tümü aynı topluluktandır.*

Lemma 7'a göre, verimli bir risk paylaşım ağında p tane sıradan olmayan bileşen $S_1, \dots, S_p$ ve q tane sıradan bileşen $\{i_1\}, \dots, \{i_q\}$ olmak üzere bileşenler kümesi $\mathcal{S}(\mathbf{g}) = \{S_1, \dots, S_p, \{i_1\}, \dots, \{i_q\}\}$ olarak yazılabilir. Dahası, sıradan olmayan tüm bileşenler her iki topluluktan da bireyler içerir, her $k = \{1, \dots, p\}$ için $S_k \cap N^A \neq \emptyset$, $S_k \cap N^B \neq \emptyset$ ve her sıradan olmayan bileşende yalnızca bir topluluklar arası bağlantı vardır. Bu nedenle, verimli bir ağda p adet topluluklar arası bağlantı vardır ve $\sum_{k=1}^p (s_k - 2) = 2n - q - 2p$ topluluk içi bağlantı vardır. Her bağlantıda iki birey yer aldığından, verimli bir $\mathbf{g}$ ağındaki tüm bağlantıların toplam maliyeti $\sum_{i \in N} C_i(\mathbf{g}) = 2(pc_H + (2n - q - 2p)c_L)$ 'ye eşittir. Sıradan bileşen sayısı q için bir üst sınır vardır. $0 \leq p \leq n$ olduğu ve topluluklar arası bir bağlantı her iki topluluktan en az bir birey gerektirdiği için, $0 \leq q \leq 2n - 2p^{24}$ olacaktır. Ancak $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ ise, verimli bir ağdaki tüm sıradan bileşenler aynı topluluktandır: $i_k \in N^A$ tüm $1 \leq k \leq q$ için veya $i_k \in N^B$ tüm $1 \leq k \leq q$ için. Bu durumda, sıradan bileşenlerin sayısı, q , $q \leq n - p$ ile sınırlıdır.

Aşağıdaki önerme, verimli risk paylaşım ağlarının kümesini karakterize eder.

Önerme 8 *Risk paylaşım ağlarında,*

- i. *eğer $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_H + 2(n - 1)c_L > n(\bar{v} - \underline{v})$ ise, tek verimli ağ boş ağdır,*
- ii. *eğer $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_H < 2c_L$ ise, bir ağ ancak ve ancak tam eşleşme ise verimlidir,*

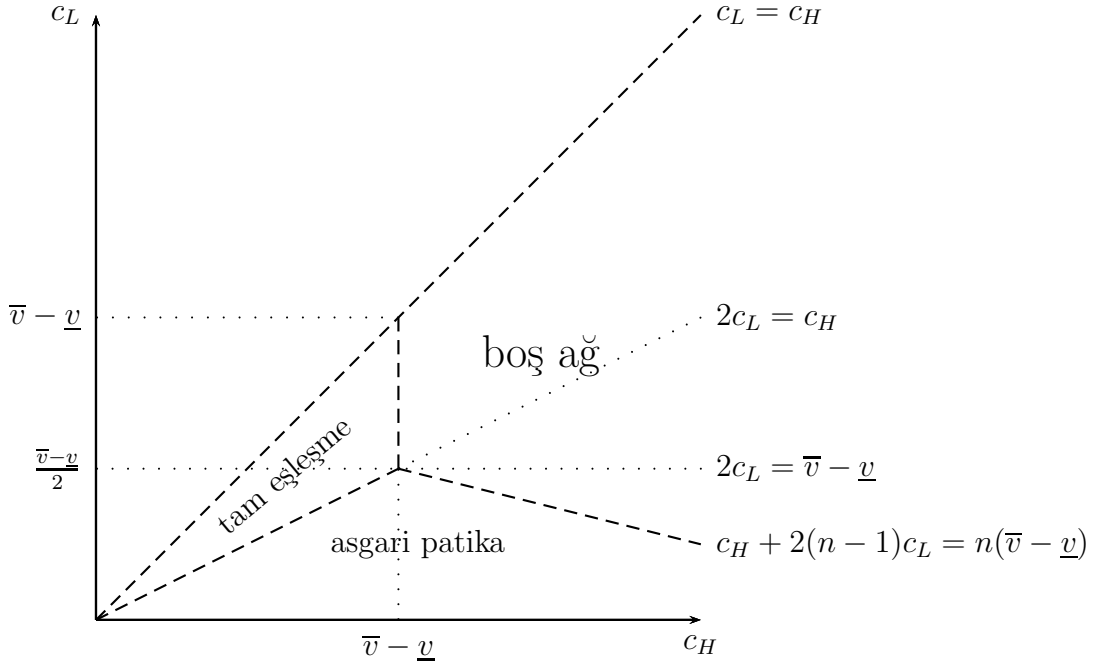
²⁴Boş ağlar için, $p = 0$, $q = 2n$. Tam eşleşme için, $p = n$ ve $q = 0$. Asgari patika ağı için, $p = 1$ ve $q = 0$.

iii. eğer $2c_L < c_H$ ve $c_H + 2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v})$ ise, bir ağ ancak ve ancak asgari patika ağı ise verimlidir.

Verimli ağlar kümesi Şekil 9'da farklı maliyet değerleri için gösterilmiştir. Önerme 8'te listelenen üç tür ağın verimli olduğu maliyet değerleri kesik çizgilerle belirlenen alanlardır. Eğer maliyet değerlerindeki eşitsizliklerden herhangi biri eşitlikle sağlanırsa, Şekil 9'daki bu eşitsizlik için komşu olan ağ türlerinin her ikisi de verimlidir. Topluluk içi maliyetlerin, topluluklar arası maliyetlerden az olduğunu, $c_L < c_H$, varsaydığımız için tüm olası maliyet değerleri Şekil 9'da $c_L = c_H$ çizgisinin altındaki bölgede olacaktır.

Şekil 9

Risk Paylaşım Ağlarında Farklı Maliyet Değerleri için Verimli Ağlar



Önerme 8'deki sonuçları görmek için, Lemma 7'nin bir sonucu olarak, p adet topluluklar arası bağlantıya ve q tane sıradan bileşene sahip bir $\mathbf{g}$ ağı düşünelim. Önerme 8'de listelenen üç tür verimli ağa ulaşmak için ağdaki $\mathbf{g}$ bağlantılarını değiştirebilir ve toplam refahın kesinlikle arttığını gösterebiliriz ki bu da istenen sonuçları gösterir.

Boş ağın verimli olduğunu görmek için, $\mathbf{g}$ 'deki tüm bağlantıları sildiğimizi varsayalım. Toplam fayda $2(pc_H + (2n - q - 2p)c_L)$ artarken, toplam beklenen fayda azalır. Ancak toplam beklenen faydadaki azalma, tüm $2n - q$ bireyin ağ $\mathbf{g}$ 'deki sıradan olmayan bileşenlerde olduğunu ve en yüksek beklenen faydaya $\bar{v}$ sahip olduğunu varsayarsak, en fazla $(2n - q)(\bar{v} - \underline{v})$ olur. Dolayısıyla beklenen net

faydadaki değişim

$$(2n - q - 2p)(2c_L - \bar{v} + \underline{v}) + 2p(c_H - \bar{v} + \underline{v}) \quad (3.5)$$

olacaktır. Toplam faydaki değişim eğer $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ve $2c_L > \bar{v} - \underline{v}$ ise tam pozitiftir. Bu, Şekil 9'da boş ağın verimli olduğu bölgenin, $2c_L = \bar{v} - \underline{v}$ ile gösterilen noktalı çizgisinin üstündeki kısmıdır. Şekil 9'daki boş ağ için kalan bölgede²⁵, 3.5 denkleminin ilk kısmı negatif olabilir. Ancak Denklem 3.5'in en düşük değeri $\mathbf{g}$ 'nin asgari patika ağı olduğu durumdur: $p = 1$ (Eğer $p = 0$ ise, $\mathbf{g}$ de boş ağdır) ve $q = 0$. O zaman, Denklem 3.5 aşağıdaki denklemden büyük olur.

$$(2n - 2)(2c_L - \bar{v} + \underline{v}) + 2(c_H - \bar{v} + \underline{v}) = 2(c_H + 2(n - 1)c_L - n(\bar{v} + \underline{v}))$$

$c_H + 2(n - 1)c_L > n(\bar{v} - \underline{v})$ olduğu için bu son denklem tam pozitif olur. Her iki durumda da tüm bağlantıları silmek toplam faydayı kesinlikle artıracığından boş ağ tek verimli ağdır.

Önerme 8'in ikinci kısmını görmek için, $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_H < 2c_L$ olduğunu varsayalım. $\mathbf{g}$ ağındaki tüm $2n - q - 2p$ topluluk içi bağlantıları silersek (böylece birbirleriyle birebir eşleşen $2p$ birey olur) ve topluluk içi bağlantıları sildikten sonra hiç arkadaşı olmayan bireyler arasında $n - p$ topluluklar arası bağlantı eklersek, sonuç olarak tam eşleşmeye erişiriz. Tüm bağlantıların toplam maliyeti $(2n - q - 2p)2c_L - (n - p)c_H$ kadar değişir ve toplam beklenen fayda en az $q(\bar{v} - \underline{v})$ kadar artar. Beklenen net fayda aşağıdaki ifade kadar değişir.

$$\begin{aligned} 2(n - p)(2c_L - c_H) + q(\bar{v} - \underline{v} - 2c_L) &\geq q(2(2c_L - c_H) + \bar{v} - \underline{v} - 2c_L) \\ &= q(\bar{v} - \underline{v} - c_H) + q(2c_L - c_H) > 0 \end{aligned}$$

İlk eşitsizlik, topluluklar arası bağlantının maliyeti düşük olduğunda ($c_H < \bar{v} - \underline{v}$) $q \leq n - p$ olmasından kaynaklanır ve ikinci eşitsizlik maliyetler hakkındaki varsayımlardan kaynaklanır. Bu nedenle, tam eşleşmeler, $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_H < 2c_L$ olduğunda tek verimli ağlardır.

Son olarak, asgari patika ağlarının verimliliğini görmek için, $\mathbf{g}$ ağındaki sıradan olmayan bir bileşendeki tek topluluklar arası bağlantıyı sildiğimizi ve onu 2 topluluk içi bağlantısıyla değiştirdiğimizi varsayalım, böylece sıradan olmayan bileşeni başka bir sıradan olmayan bileşenle birleştirmiş oluruz. Bu, iki topluluk içi bağlantının bir

²⁵ $c_H > \bar{v} - \underline{v}$, $2c_L < \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_H + 2(n - 1)c_L > n(\bar{v} - \underline{v})$ değerlerini sağlayan bölge.

topluluklar arası bağlantıdan daha az maliyetli olması nedeniyle toplam bağlantı maliyetini azaltır: $2c_L < c_H$. Bu süreci tekrarlayarak başlangıç ağındaki tüm sıradan olmayan bileşenlerin tek bir sıradan olmayan bileşene dönüştüğü bir ağa ulaşırız. Daha sonra, tüm sıradan bileşenleri tek sıradan olmayan bileşene eklersek ortaya çıkan ağ asgari patika ağıdır. Toplam maliyetteki değişim, $2(p-1)(c_H - 2c_L)$ (topluluklar arası $p-1$ bağlantının iki topluluk içi bağlantısıyla değiştirilmesi ile), $-2qc_L$ (tek sıradan olmayan bileşene q sıradan bileşenin eklenmesi ile) ve $q(\bar{v} - \underline{v})$ (q sıradan bileşendeki bireylerin toplam beklenen faydasındaki en az artış) toplamına eşittir. Toplam net faydadaki değişim en az

$$2(p-1)(c_H - 2c_L) + q(\bar{v} - \underline{v} - 2c_L) \quad (3.6)$$

olacaktır.

Ağ $\mathbf{g}$ içinde en az bir topluluklar arası bağlantı olduğu ($p \geq 1$) varsayıldığında, $2c_L < c_H$ ve $2c_L < \bar{v} - \underline{v}$ ise 3.6 denklemi tam pozitiftir. Eğer $\mathbf{g}$ ağında $p = 0$ ise, yani $\mathbf{g}$ boş ağ ise, o zaman 3.6 denklemi yeniden yazılabilir:

$$2(n(\bar{v} - \underline{v}) - 2(n-1)c_L - c_H)$$

ki $c_H + 2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v})$ varsayımı sebebiyle yukarıda ifade tam pozitiftir. Dolayısıyla, eğer $2c_L < c_H$ ve $c_H + 2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v})$ ise, bir ağ ancak ve ancak asgari patika ağıysa verimlidir.

Boş ağ hariç tüm verimli ağlarda, bireyler gelir riskine karşı tam sigortaya erişir ve en yüksek beklenen gelir faydasına $\bar{v}$ sahiptir. Bos ağ dışındaki verimli ağlarda tam risk paylaşımı sağlandığı ve bireyler en yüksek beklenen faydaya eriştiği için hangi ağ türünün verimli olacağı ise ilişkilerin toplam maliyetlerine bağlıdır. Topluluklar arası maliyet topluluk içi maliyetinden yeteri kadar düşükse ($c_H < 2c_L$) her iki topluluktan birer bireyin bağlantı kurduğu tam eşleşme en verimli ağ olacaktır. Aksi türlü ise her iki birey arasında topluluklar arası bağlantı maliyetine katlanmak yerine her iki topluluğu birbirine bağlayan tek bir bağlantı ile maliyetlerin en aza düşürüldüğü asgari patika ağları verimli olacaktır.

3.3 İkili Kararlı Ağlar

Bu kısımda ikili kararlı ağları inceleyeceğiz. İkili kararlılık bir denge kavramı olarak verimlilik denge kavramından önemli bir şekilde ayrılır. Verimli ağları çalışırken tanım gereği toplam faydayı maksimize eden ağı tespit etmeye çalışıyorduk.

Bireylerin verimli ağlardaki konumları ve sahip oldukları bağlantılar hakkında tercihleri yoktur. Bir bakıma verimli ağlar, toplumu bir araya getiren bireylerin toplumsal fayda için kişisel faydalarından vazgeçtiği veya bir politika yapıcının bireyler arasındaki bağlantılara karar verme gücü olduğu bir durumdaki dengedir. İkili kararlılık ise bireylerin sahip oldukları bağlantılar arasında tam bir tercih ve karar yetkisine sahip oldukları durumları inceleyen bir denge kavramıdır. Verimli ağlar olası tüm ağları tarayarak toplam faydayı maksimize eden ağları ararken ikili kararlı ağlar daha yerel düzlemde her bir bireyin içinde bulunduğu ağ ile bu ağ ile bu bireyin taraf olduğu tek bir bağlantıda farklı olan diğer ağları yine bu birey açısından karşılaştırır. Bu bakımdan ikili kararlı ağların aynı zamanda verimli olup olmadıkları ilgi çekici bir sorudur. Bu bölümde bu soruların cevaplarını arayacağız.

İkili kararlı bir ağ, hiçbir bireyin tek başına mevcut bir bağlantıyı silmenin ve hiçbir iki bireyin yeni bir bağlantı oluşturmamanın faydalarına olmadığı bir ağdır. Bir ağ $\mathbf{g}$ eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa ikili kararlıdır.

(i) tüm $ij \in \mathbf{g}$ için, $U_i(\mathbf{g}) \geq U_i(\mathbf{g} - ij)$ and $U_j(\mathbf{g}) \geq U_j(\mathbf{g} - ij)$, ve

(ii) tüm $ij \notin \mathbf{g}$ için, eğer $U_i(\mathbf{g} + ij) > U_i(\mathbf{g})$ ise $U_j(\mathbf{g} + ij) < U_j(\mathbf{g})$.

Risk paylaşım ağlarında, lemma 6 ikili kararlı ağlar için de geçerlidir. Eğer gereksiz bir bağlantı varsa, iki birey de gereksiz bağlantıyı silmekten fayda elde eder çünkü bu maliyetleri düşürürken, tüm bireyler hala aynı bileşene ait olduğundan beklenen gelir faydası aynı kalır.

Lemma 9 *İkili kararlı bir ağda gereksiz bağlantı yoktur, yani tüm bileşenler asgari bağlıdır.*

Sonraki lemma, ikili kararlı bir ağın tüm sıradan olmayan bileşenlerinin dengeli bileşenler olması gerektiğini gösterir. Bunu görmek için, ikili kararlı bir ağın $\mathbf{g}$ dengesiz, sıradan olmayan bir S bileşeni olduğunu düşünün. Değerlendirilmesi gereken iki durum vardır. Bu bileşen yalnızca bir topluluktan veya her iki topluluktan da bireyler içerebilir. İlk durumda, tüm bireylerin bir bağlantıyı silme teşviki vardır çünkü bunu yapmak yalnızca bağlantının maliyetini düşürürken beklenen faydayı sabit tutar. İkinci durumda $s^A > s^B$ olduğunu varsayalım. Lemma 9'a göre, bileşen asgari bağlıdır ve derecesi 1 olan en az iki birey vardır. Eğer 1 bağlantıya sahip bireylerden biri A topluluğundan ise, bu bireyin (tek) arkadaşı bağlantıyı silmesi faydasına olur ve yeni bileşendeki topluluk üyelerinin boyutu azaldıkça beklenen faydayı artırarak kendi faydasını artırır ve ayrıca bağlantı maliyetini de düşürür. Eğer

tek bağlantıya sahip tüm bireyler B topluluğuna aitse, o zaman bileşende öyle bir bağlantı vardır ki, bu bağlantı kaldırıldığında bileşen iki bileşene bölünür, bunlardan biri dengeli bileşendir. Dolayısıyla, bu bağlantıya dahil olan ve yeni dengeli bileşene ait olan birey faydasını artırır. Bu birey için faydadaki artış iki yönlüdür: Beklenen gelir faydası artık mümkün olan en yüksek olan $\bar{v}$ 'ye eşittir ve ayrıca bağlantıların maliyeti azalır. Ayrıntılar için ekteki lemmanın kanıtına bakınız. Dahası, lemma 10 tüm dengeli bileşenlerin indirgenemez olduğunu gösterir, çünkü aksi takdirde dengeli bileşen S 'de i ve j arasında bir bağlantı vardır ve bu bağlantı kaldırıldığında bileşen S iki dengeli bileşene S', S'' bölünür, öyle ki $S' \cup S'' = S$ ve $i \in S'$ ve $j \in S''$. O zaman hem i hem de j bağlantıyı silmek için teşvike sahiptir, çünkü bu yalnızca bağlantıların maliyetini azaltır.

Lemma 10 *İkili kararlı bir ağda, sıradan olmayan tüm bileşenler dengeli bileşenlerdir. Ayrıca, ikili kararlı bir ağdaki tüm dengeli bileşenler indirgenemezdir.*

Lemma 10'un doğrudan bir sonucu, dengesiz, sıradan olmayan bir bileşene sahip bir ağın ikili kararlı olmadığıdır. Ek olarak, dengeli bir bileşendeki bireyler gelir riskine karşı tam sigortalanır ve en yüksek beklenen fayda $\bar{v}$ 'yi elde eder. Ancak Lemma 10, ikili kararlı bir ağdaki sıradan bileşenlere herhangi bir kısıtlama getirmez. Bir sonraki Lemma, topluluklar arası bağlantılar yeterince küçükse, ikili kararlı bir ağda sıradan bileşen olmadığını gösterir.

Lemma 11 *Eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise ikili kararlı bir ağda sıradan bir bileşen yoktur.*

Lemma 11'deki koşul tersine çevrilirse, tek ikili kararlı ağ, sadece sıradan bileşenlere sahip boş ağ olur. $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ olduğunda, tüm tam eşleşmeler ikili kararlıdır ancak başka ikili kararlı ağlar da vardır. İkili kararlı ağlarla ilgili sonucumuzu belirtmeden önce son bir notasyonu tanıtmamız gerekiyor. Bileşen kümesi $\mathcal{S}(\mathbf{g}) = \{S_1, \dots, S_K\}$ olan $\mathbf{g}$ ağını ele alalım. Lemma 10'a göre tüm bileşenler dengeli, sıradan olmayan ve indirgenemezdir. Herhangi bir $i \in S_k$ 'nin beklenen faydasının $EU_i(s_k^A, s_k^B)$ şeklinde yazılabileceğini belirtmiştik. Ayrıca beklenen fayda aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar

$$\begin{aligned} EU(s_k^A - 1, s_k^B) &> EU(s_k^A - 2, s_k^B) > \dots > EU(1, s_k^B) \\ EU(s_k^A, s_k^B - 1) &> EU(s_k^A, s_k^B - 2) > \dots > EU(s_k^A, 1) \end{aligned}$$

s^* 'in en büyük bileşenin büyüklüğünün²⁶ yarısını ifade etsin: $s^* = \frac{1}{2} \max\{s_1, \dots, s_K\}$.

²⁶Tüm bileşenler dengeli olduğundan s^* çifttir ve en büyük bileşendeki yalnızca A topluluğundan veya yalnızca B topluluğundan olan bireylerin sayısını gösterir.

Bu durumda tüm $k = \{1, \dots, K\}$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanacaktır

$$EU(s^* - 1, s^*) > EU(s_k^A - 1, s_k^B) \quad (3.7)$$

Son olarak $EU^*(\mathbf{g}) = EU(s^* - 1, s^*)$ bu bileşenden elde edilen beklenen fayda olsun. Aşağıdaki önerme, ikili kararlı ağların kümesini karakterize eder.

Önerme 12 *Risk paylaşım ağında,*

- i. *eğer $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ise, boş ağ tek ikili kararlı ağdır,*
- ii. *eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise, tüm tam eşleşmeler ikili kararlıdır ancak başka ikili kararlı ağlar da vardır. Tüm bileşenleri sıradan olmayan, dengeli ve indirgenemez olan herhangi bir ağ $\mathbf{g}$ eğer $c_H \leq \bar{v} - EU^*(\mathbf{g})$ ise ikili kararlıdır,*
- iii. *eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_L \leq \bar{v} - EU(n - 1, n)$ ise, asgari patika aği ikili kararlıdır.*

Topluluklar arası bir bağlantının maliyeti, risk paylaşımının maksimum kazancı olan $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ 'den daha yüksek olduğunda, yalnızca boş ağ ikili kararlıdır. Hiç kimsenin topluluklar arası bir bağlantı eklemek için teşviki olmadığından boş ağın ikili kararlı olduğu açıktır. Boş ağın ikili kararlı tek ağ olduğunu görmek içinse, boş ağdan farklı bir ağın ikili kararlı olduğunu varsayalım. Lemma 10'dan dolayı bu ağdaki bileşenler dengeli ve indirgenemezdir. O zaman en az iki birey arasında topluluklar arası bir bağlantı vardır. Topluluklar arası bağlantıyı silerek, her iki birey de toplam maliyetlerini c_H kadar azaltarak faydalarını arttırırken beklenen faydadaki maksimum azalma $\bar{v} - \underline{v}$ 'ye eşittir. Kazanç c_H maksimum kayıp $\bar{v} - \underline{v}$ 'den büyük olduğunda, her iki birey de topluluklar arası bağlantıyı silmekten kazanç sağlar.

Ancak, risk paylaşımının maksimum kazancı topluluklar arası bağlantı maliyetinden daha yüksek olduğunda, tam eşleşmeler ikili kararlıdır ve ayrıca diğer ikili kararlı ağlar da vardır. Bileşenleri sıradan olmayan, dengeli ve indirgenemez olan herhangi bir ağ, c_H yeterince düşükse ikili kararlıdır. Örneğin, yıldız aği (Şekil 7'deki ağ 1) ve Şekil 7'deki ağ 5, $n = 6$ için $c_H \leq \bar{v} - EU(3, 2)$ ise bu tür ikili kararlı ağlara örnektir. Bu ağların c_H yeterince düşük olduğunda neden ikili kararlı olduğunu görmek için, bir bağlantıyı silmek için teşvik olup olmadığını kontrol etmemiz yeterlidir. Tüm bileşenler asgari bağlı olduğundan, bir bağlantıyı silmek bir bileşeni ikiye böler ve tüm bileşenler indirgenemez olduğundan, yeni iki bileşen dengesizdir. Bu nedenle, dengeli bir bileşendeki bir bağlantıyı silmek beklenen faydayı azaltır. Beklenen faydadaki azalma, yeni bileşendeki A ve B topluluklarından bireylerin arasındaki fark minimumsa en düşük olur. Beklenen faydada en düşük azalmaya

sahip olan bireyler, Şekil 7'deki yıldız ağındaki 2 numaralı birey ve ağ 5'teki 1, 2 ve 5 numaralı bireylerdir²⁷. Bir bağlantıyı silmenin getirisi maliyetteki düşüştür ve getiri, bağlantı topluluklar arası bağlantı olduğunda en yüksektir. Eğer $c_H \leq \bar{v} - EU(3, 2)$ ise, o zaman her iki ağdaki bir bağlantıyı silmenin en yüksek net faydasına sahip olan bireyler bile bir bağlantıyı silmek için teşvike sahip değildir. Bu nedenle, $c_H \leq \bar{v} - EU(3, 2)$ olduğunda, bu tür ağlar ikili kararlı olur.

Şekil 7'deki 1 ve 5 ağlarında yalnızca bir bileşen vardır. Ağda birden fazla bileşen olduğunda, en yüksek boyuta sahip bileşen c_H 'nin üst sınırını belirler. Her bileşende, bir bağlantıyı silmek için en yüksek teşvike sahip olan birey, yalnızca bir arkadaşı olan bir bireyle bağlantısı olan bireydir.²⁸ Denklem 3.7, herhangi bir bileşenlerdeki bir bağlantıyı silmek için en yüksek teşvike sahip tüm bireylerin içinde bu bileşenlerden en büyük bileşene ait olan birey beklenen faydada en düşük düşüşü deneyimlediğini ifade eder. Eğer $c_H \leq \bar{v} - EU^*(\mathbf{g})$ ise, bu bireyin bile bir bağlantıyı silmek için hiçbir teşviki yoktur. Ayrıca, ağda birden fazla bileşen olduğunda, yeni bir bağlantı eklemek için hiç kimsenin teşviki olmadığı açıktır, çünkü yeni bir bağlantı eklemek iki dengeli bileşeni birleştirir ve bireyler beklenen faydada herhangi bir fayda sağlamadan yalnızca ek maliyete katlanmak zorunda kalırlar²⁹.

Son olarak, verimli ağlardan biri olan asgari patika ağ, c_L yeterince küçükse ikili kararlıdır. Asgari patika ağının ikili kararlılığı için, $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise asgari patika ağındaki tek topluluklar arası bağlantıyı silmek için bir teşvik olmadığından c_H üzerinde daha sıkı bir koşula ihtiyacımız yoktur. Ancak topluluk içi bağlantısı kaldırılırsa, bu bağlantıya dahil olan iki birey, beklenen faydada bir azalma olmasına rağmen maliyetlerde c_L kadar bir düşüş olur. Sadece bir bileşen olduğundan, beklenen faydadaki en düşük azalma $\bar{v} - EU(n - 1, n)$ 'e eşittir. Eğer $c_L \leq \bar{v} - EU(n - 1, n)$ ise, o zaman hiçbir iki bireyin bir bağlantıyı silmek için teşviki olmaz ve bu da asgari patika ağının ikili kararlılığını temin eder.

Verimli ağlar ile ikili kararlı ağlar karşılaştırıldığında tüm verimli ağların ikili kararlı olmaya devam ettiğini ancak verimli olmayan bazı ikili kararlı ağlar olduğunu fark edilebilir. Bağlantıların maliyetleri yeterince yüksekse boş ağ tek verimli ağdır, ancak yalnızca topluluklar arası bağlantının maliyeti yeterince yüksekse ikili kararlıdır. Şekil

²⁷Yıldız ağındaki 2 numaralı birey herhangi bir bağlantısını silerse, beklenen faydası $EU(3, 2)$ 'ye eşit olur ve benzer şekilde 5 ağında sırasıyla 1, 4 numaralı bağlantıyı silerse, 2, 3 numaralı bağlantıyı silerse ve 5, 6 numaralı bağlantıyı silerse; 1, 2 ve 5 numaralı bireylerin beklenen faydaları $EU(3, 2)$ 'ye eşit olur.

²⁸Yıldız ağlarında, bu kişi 2'dir çünkü tek bağlantısı olan bireylerin tamamında bağlantının diğer ucundaki kişi 2'dir. Aynısı Şekil 7'deki 5 ağındaki 1, 2 ve 5 bireyleri için de geçerlidir.

²⁹Yeni bir bağlantıdan önce ve sonra dengeli bir bileşene ait oldukları için, beklenen faydaları en yüksek değer $\bar{v}$ 'ye eşittir.

9'a bakıldığında, $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ olduğunda verimli bir ağı ya boş ağ ya da asgari patika ağı olduğu, ancak asgari patika ağının ikili kararlı olmadığı görülebilir. Asgari patika ağının ikili kararlı olmamasının nedeni risk paylaşımındaki dışsallıklarla ilgilidir. Bir risk paylaşım ağında, bir birey doğrudan bağlantıların maliyetini üstlenirken, birey yalnızca doğrudan bağlantılarından değil, ait olduğu bileşendeki herkesten fayda sağlar. Asgari patika ağında, tam sigortanın kazancından $(\bar{v} - \underline{v})$ daha yüksek olan c_L 'ye ek olarak c_H maliyetini üstlenen iki birey vardır. Faydaları negatif olsa bile, tüm diğer bireylerin dengeli bileşeni sürdürerek pozitif dışsallıktan faydalanmalarını sağlarlar ve bu da tüm bireylerin tam sigortaya ulaşmasını sağlar. c_L yeterince küçük olduğunda, diğer bireyler pozitif dışsallıktan faydalanır ve asgari patika ağındaki refah, boş ağdaki refahtan daha yüksektir. İkili kararlı bir ağda, bireyler pozitif dışsallığı yaratmanın maliyetini başka bir bireyin üstlenmesini tercih eder. Bu nedenle, asgari patika ağındaki tek topluluklar arası bağlantıda yer alan iki birey pozitif dışsallığın maliyetini ödemeyi reddeder. Asgari patika ağlarının ikili kararlı olmamasının nedeni budur.

c_H tam sigortanın kazancından, $\bar{v} - \underline{v}$, düşük olduğunda sadece tam eşleşmeler topluluk içi bağlantıların maliyetinden bağımsız olarak ikili kararlıdır. $2c_L < c_H$ olduğunda, yani asgari patika ağları verimli iken, toplam refahı maksimize etmek için tam eşleşmedeki bireylerin topluluklar arası bağlantıları koparması ve bu topluluklar arası bağlantıyı iki topluluk içi bağlantısıyla değiştirmesi ile bireyler yeni ve daha büyük bir dengeli bileşene katılır. Bu süreçte, yalnızca bağlantıların toplam maliyetini azaldığı için aynı prosedürü tekrarlırsak toplumsal refahı artar. Yukarıdaki prosedür sürekli tekrarlanırsa, verimli olan asgari patika ağına ulaşırız. Fakat topluluk içi bağlantısının maliyeti yeterince küçük olsa bile, $2c_L < c_H$, tam eşleşmeler her ne kadar verimli olmasalarda ikili kararlı olurlar. Bunun nedeni, yukarıdaki prosedürün bir seferde birden fazla bağlantıyı koparmayı ve eklemeyi gerektirmesidir; oysa ikili kararlılık tanımı, bireylerin miyop/öngörüsüz olduğunu dolaylı olarak varsayar ve bireylerin bir bağlantıyı ekleme veya silme kararına diğer bireylerin nasıl tepki verebileceğini öngörmesine izin vermez. Bu ayrıca, üç tür verimli ağdan başka çiftler arası kararlı ağların neden olduğunu da açıklar. Bir ağın tüm bileşenleri dengeli (dolayısıyla sıradan olmayan) ve indirgenemez olduğunda, bireylerin c_H yeterince düşükse bağlantıları silmek için hiçbir teşviki yoktur.³⁰ c_H üzerindeki üst sınır, bir bağlantı kaldırıldığında beklenen faydadaki minimum kayba bağlıdır.

³⁰Bireylerin, dengeli bir bileşene ait olarak tam bir sigorta elde ettikleri ve bir bağlantı eklemenin yalnızca bağlantıların maliyetini artırdığı için, bağlantının maliyetinden bağımsız olarak bağlantı eklemek için hiçbir teşviki olmadığını unutmayın.

3.4 Dinamik Ağ Oluşumu

Bu bölümde boş bir ağ ile başlayan dinamik bir ağ oluşum sürecini ele alacağız. Sürecin her adımında, rastgele bir bağlantı seçilir. Bağlantı, sürecin önceki adımlarında zaten oluşturulmuşsa, bağlantıya dahil olan iki bireyden en az birinin faydasını artırıyorsa bağlantıyı silmeye karar verir ve aksi takdirde bağlantıyı tutmaya karar verirler. Bağlantı henüz oluşturulmamışsa, bağlantıya dahil olan iki bireyin de faydalarını artarsa bağlantının oluşturulmasına karar verirler. Aksi takdirde, kişiler bağlantıyı eklememeye karar verir ve süreç aynı ağ ile bir sonraki adıma geçer. Fark edilmeli ki bu süreç herhangi bir adımda ikili kararlı bir ağa ulaşırsa tanım gereği sonraki tüm adımlarda ağ değişmeyecektir. Dolayısıyla eğer bir ağda ikili kararlı bir ağ varsa bu süreç o ağa doğru yakınsayacaktır. Fakat yukarıda bahsedilen süreç tüm ikili kararlı ağlara yakınsamayabilir³¹. Dolayısıyla, genel anlamda, dinamik ağ oluşturma süreçleri sonucu ortaya çıkan dinamik ağlar ikili kararlı ağlar kümesinin bir alt kümesi olacaktır. Bu bölümde hangi dinamik ağların karşımıza çıkacağını gösterecek ve bunları ikili kararlı ağlar ile kıyaslayacağız.

Teknik olarak, dinamik ağ oluşturma süreci, bir $\{\mathbf{g}^t\}_{t=0}^{\infty}$ ağlar dizisidir; burada $\mathbf{g}^t$, sürecin t adımıdaki ağı temsil eder. Süreç, tüm $i, j \in N$ için $g_{ij}^0 = 0$ olan boş $\mathbf{g}^0$ ağla başlar. Her t adımında, i, j bireyleri arasındaki bir bağlantı, tüm $i \neq j$ için $p_{ji} = p_{ij} > 0$ olacak şekilde p_{ij} olasılığıyla rastgele seçilir.

Herhangi bir t adımında seçilen bağlantı ağda zaten mevcutsa, $g_{ij}^t = 1$, o zaman bireyler i, j bağlantıyı silip silmemeye karar verir. Bireylerden en az biri bağlantıyı silerek kendi faydasını (tam) artırırsa ($U_i(\mathbf{g}^t - ij) > U_i(\mathbf{g}^t)$) bu bağlantı silinir ve $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t - ij$ olarak belirlenip bir sonraki adıma geçilir. Bağlantıyı silmek (zayıf bir şekilde) her iki bireyin faydasını azaltırsa³², $k \in \{i, j\}$ için $U_k(\mathbf{g}^t - ij) \leq U_k(\mathbf{g}^t)$, o zaman bağlantıyı tutmaya karar verirler ve $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t$ olarak belirleriz.

Eğer ij bağlantısı $\mathbf{g}^t$ ağında mevcut değilse, $g_{ij}^t = 0$, o zaman bireyler bu bağlantıyı kurup kurmamaya karar verirler. Eğer her iki bireyin de faydalarını (zayıf bir şekilde) artırıyorsa ($k \in \{i, j\}$ için $U_k(\mathbf{g}^t + ij) \geq U_k(\mathbf{g}^t)$) bağlantıyı eklerler ve $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t + ij$ olarak belirleyip bir sonraki adıma geçeriz. Aksi takdirde, en az bir bireyin faydasını azaltıyorsa ($U_i(\mathbf{g}^t + ij) < U_i(\mathbf{g}^t)$) bağlantıyı oluşturmamaya karar verirler ve $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t$ olarak belirleriz.

Sonlu bir tam sayı T varsa öyle ki tüm $t \geq T$ için, t adımıdaki ağ T adımıdaki

³¹Bu gözlem tabi ki bizim süreci boş ağdan başlatmamızdan kaynaklanıyor. Aksi türlü her ikili kararlı ağ için öyle bir başka ağ vardır ki dinamik süreç ikili kararlı ağa yakınsar.

³²İkili kararlı ağ tanımı eğer bir bağlantı bireylerin faydalarını değiştirmiyorsa bu bağlantının eklendiği ağı ikili kararlı sayar. Bir bakıma tanım daha fazla bağlantının olduğu ağları tercih eder.

ağla aynıysa ($\mathbf{g}^t = \mathbf{g}^T$ tüm $t \geq T$ için), sürecin sonlu zaman T 'de durduğunu ve $\mathbf{g}^t$ 'nin dinamik kararlı ağ olduğunu söyleriz. Süreç durursa, sürecin durduğu ağın, yeni bağlantılar eklemek veya mevcut bağlantıları silmek için bir teşvik olmadığından, ikili kararlı bir ağ olduğunu fark edebiliriz. Jackson ve Watts (2001) bu tür ikili kararlı ağları kararlı durumlar olarak adlandırır.

Aşağıdaki önerme, c_H maksimum beklenen fayda kazancı $\bar{v} - \underline{v}$ 'den düşükse dinamik sürecin boş ağda durduğunu belirtir. Aksi takdirde süreç tam bir eşleşmede durur.

Önerme 13 $\{\mathbf{g}^t\}_{t=0}^{\infty}$ yukarıda tanımlanan süreç olsun. Eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise, o zaman tüm $t \geq \bar{t}$ için $\mathbf{g}^t = \mathbf{m}$ olacak şekilde bir $\bar{t}$ vardır ve $\mathbf{m}$ tam eşleşmedir. Eğer $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ise, tüm $t > 0$ için $\mathbf{g}^t = \mathbf{g}^0$ olur.

Önermenin arkasındaki fikir şudur: Topluluklar arası bir bağlantı seçilirse, bağlantının eklenmesi her iki bireyin beklenen faydalarını $\bar{v} - \underline{v}$ kadar artırır ve bunun maliyeti c_H olur, dolayısıyla bireylerin bağlantıyı ekleme teşviki ancak ve ancak $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise olur. İki birey arasında topluluklar arası bir bağlantı oluşturulduktan sonra, daha fazla bağlantı (topluluk içi veya topluluklar arası) ekleme teşviki olmaz çünkü bir bağlantı daha ekleyerek bireyler yeni bir bileşene ait olur ve en iyi ihtimalle yeni bileşen de dengelidir ve beklenen faydaları sabit kalır veya yeni bileşen dengesizdir ve beklenen faydaları azalır. Ancak her durumda, bağlantı maliyetleri en az c_L kadar artar. Bu nedenle süreç tüm n adet topluluklar arası bağlantı rastgele seçildikten sonra durur. İşlemin durduğu ağ tam bir eşleşmedir. Ancak $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ise, hiçbir birey çiftinin herhangi bir topluluklar arası veya topluluk içi bağlantıyı eklemeye teşviki yoktur. Daha önceki argümandan da anlaşılacağı üzere, herhangi iki bireyin topluluklar arası bağlantı oluşturma teşviki yoktur. Herhangi iki bireyin aynı topluluk bağlantısı oluşturma teşviki de yoktur çünkü bağlantının eklenmesi yalnızca maliyetlerini artırır ve beklenen faydalarını sabit tutar.

Her ne kadar dinamik sürecin durduğu yalnızca iki tür ağ, tam eşleşmeler ve boş ağlar, olmasına rağmen, c_L yeterince küçükse asgari patika ağı gibi başka ikili kararlı ağlar da vardır. Yani, yalnızca iki tür ikili kararlı ağ, tam eşleşmeler ve boş ağ, dinamik kararlı ağlardır.

Topluluklar arası bir bağlantının maliyeti yeterince düşük olduğunda, $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$, tam eşleşme dinamik kararlı ağdır, ancak $n \geq 2$ olduğunda $2c_L < c_H$ ise verimli değildir. Nedenini görmek için, topluluklar arası bir bağlantıyı iki topluluk içi bağlantıyla değiştirdiğimizi ve böylece iki bileşen S_1 , S_2 'nin tek bir bileşende birleştirildiğini düşünelim. Toplam faydadaki değişim $2(c_H - 2c_L)$ olur ve $2c_L < c_H$ ise pozitifdir. Ancak, o zaman toplam refahı artırmanın bir yolu vardır ki bu da tam

eşleşmenin verimli olmadığı anlamına gelir. Yukarıdaki işlem devam ettiğinde asgari patika ağlarına varırız ki asgari patika ağı bu maliyet kısıtı altında verimli iken dinamik kararlı değildir.

Diğer yandan, topluluklar arası bir bağlantının maliyeti yeterince yüksek olduğunda, $c_H > \bar{v} - \underline{v}$, boş ağ dinamik kararlıdır ancak boş ağ, $n \geq 2^{33}$ iken $c_H + 2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v})$ ise verimli değildir. Nedenini görmek için, toplam faydayı $2(\bar{v} - \underline{v} - c_H) < 0$ oranında azaltsa bile, topluluklar arası bir bağlantıyı zorla eklediğimizi varsayalım. Daha sonra ise aynı topluluklardan tüm bireyleri en az sayıda topluluk için bağlantı ekleyerek bu bileşene dahil edersek (asgari patika ağına ulaşırsak) toplam faydadaki değişim $2n(\bar{v} - \underline{v}) - 2(c_H + 2(n-1)c_L)$ eğer $c_H + 2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v})$ ise pozitif olur. Bu da bize verilen kısıt altında asgari patika ağlarının dinamik kararlı olmamasına rağmen neden verimli olduklarını gösterir.

3.5 Farklı Korelasyonlar Altında Risk Paylaşım Ağları

Önceki bölümlerde, farklı topluluklardaki gerçekleşen gelirlerin tam negatif korelasyonlu olduğunu varsaydık. Bu bölümde, topluluklar arasındaki tam pozitif korelasyon varsayımı gevşetiyoruz. Gerçekleşen gelirlerin her toplulukta aynı olduğu ve eşit olasılıkla yüksek veya düşük olabileceği varsayımını koruyoruz. Ancak, farklı toplulukların gerçekleşen gelir seviyeleri arasındaki korelasyon, tam negatif korelasyondan tam pozitif korelasyona kadar değişebilir. Aşağıdaki tabloda gösterilen koşullu olasılıkları varsayıyoruz.

Tablo 1

Farklı Toplulukların Gerçekleşen Gelirlerin Koşullu Olasılıkları

	$y^B = y_L$	$y^B = y_H$
$y^A = y_L$	$1 - p$	p
$y^A = y_H$	p	$1 - p$

Örneğin, A topluluğunda gerçekleşen gelir düşükse, B topluluğundaki gerçekleşen gelir de $1 - p$ olasılığıyla düşük veya p olasılığıyla yüksektir. Daha önce belirttiğimiz gibi, bir topluluktaki gerçekleşen gelirin yüksek veya düşük olma olasılığının eşit olduğunu varsayıyoruz. $p = 1$ ise, önceki bölümlerde incelediğimiz tam negatif

³³ n 'nin 2'den büyük olmasının nedeni, aksi takdirde 2 birey arasında yalnızca iki ağ mümkün olmasıdır: boş ve tam eşleşme. $n = 1$ olduğunda verimli ve ikili kararlı ağların aynı olduğu açıktır.

korelasyona geri dönmüş oluruz. $p = \frac{1}{2}$ olduğunda, topluluklar arasındaki gerçekleşen gelirler bağımsızdır ve $p = 0$ ise farklı topluluklar arasındaki gerçekleşen gelirler arasında tam pozitif korelasyona karşılık gelir. $0 \leq p \leq 1$ olduğunu varsayıyoruz.

Aşağıdaki tablo, her iki toplumdaki gerçekleşen gelirlere bağlı olarak dört durum için bir bireyin olası gelirini göstermektedir. Her iki toplumdaki gerçekleşen gelirler düşük veya yüksekse, bireyin geliri sırasıyla y_L ve y_H olur. O zaman, gelir riskine karşı herhangi bir sigorta elde edilemez. Farklı toplumlardaki gerçekleşen gelirler farklı olduğunda, bireyin geliri, tam negatif korelasyon durumuna benzer şekilde bileşenindeki A ve B topluluklarından bireylerin göreceli boyutlarına bağlıdır.

Tablo 2

Farklı Korelasyonlar Altında Risk Paylaşımı Sonrası Gelirler

	$y^B = y_L$	$y^B = y_H$
$y^A = y_L$	y_L	$\frac{s_i^A(\mathbf{g})y_L + s_i^B(\mathbf{g})y_H}{s_i(\mathbf{g})}$
$y^A = y_H$	$\frac{s_i^A(\mathbf{g})y_H + s_i^B(\mathbf{g})y_L}{s_i(\mathbf{g})}$	y_H

Koşullu olasılık p için, i bireyinin beklenen faydası

$$\begin{aligned}
 EU_i^p(\mathbf{g}) &= p \left(\frac{1}{2}v \left(\frac{s_i^A(\mathbf{g})y_H + s_i^B(\mathbf{g})y_L}{s_i(\mathbf{g})} \right) + \frac{1}{2}v \left(\frac{s_i^A(\mathbf{g})y_L + s_i^B(\mathbf{g})y_H}{s_i(\mathbf{g})} \right) \right) \\
 &\quad + (1-p) \left(\frac{1}{2}v(y_L) + \frac{1}{2}v(y_H) \right) \\
 EU_i^p(\mathbf{g}) &= pEU_i(\mathbf{g}) + (1-p)\underline{v}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. 3.2 ve 3.8 denklemlerinin karşılaştırılması bize $EU_i^p(\mathbf{g})$ beklenen fayda fonksiyonunun tam negatif korelasyon altındaki $EU_i(\mathbf{g})$ beklenen fayda fonksiyonunun doğrusallığı koruyan bir dönüştürmesi olduğunu gösterir. Dahası, tüm $i \in N, \mathbf{g} \in \mathcal{G}$ ve $p < 1$ için

$$EU_i^p(\mathbf{g}) < EU_i(\mathbf{g})$$

olur ve tam sigortanın maksimum beklenen fayda getirisi de artık $p(\bar{v} - \underline{v})$ olur.

Yaptığımız genelleme sonucu, verimli ağların karakterizasyonundaki (Önerme 8), ikili kararlı ağlardaki (Önerme 12) ve dinamik kararlı ağlardaki (Önerme 13) maliyetler üzerine kısıtlar değişecektir.

Verimli ağdaki kısıtlardaki değişikliklerle başlıyoruz. Aşağıdaki sonuç, Önerme 8'in sonucudur.

Sonuç 14 Risk paylaşım ağlarında,

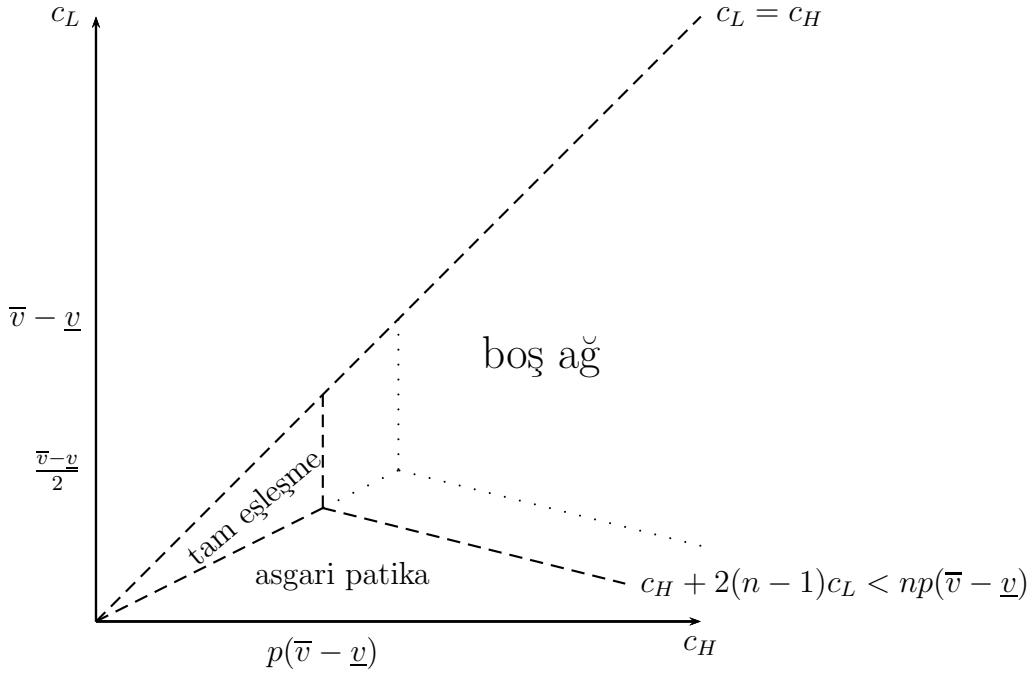
- i. eğer $c_H > p(\bar{v} - \underline{v})$ ve $c_H + 2(n-1)c_L > np(\bar{v} - \underline{v})$ ise, tek verimli ağ boş ağdır,
- ii. eğer $c_H < p(\bar{v} - \underline{v})$ ve $c_H < 2c_L$ ise, bir ağ ancak ve ancak tam eşleşme ise verimlidir,
- iii. eğer $2c_L < c_H$ ve $c_H + 2(n-1)c_L < np(\bar{v} - \underline{v})$ ise, bir ağ ancak ve ancak asgari patika ağı ise verimlidir.

Önerme 8'e kıyasla, tek değişikliğin beklenen faydanın maksimum kazancı olan $\bar{v} - \underline{v}$ 'nin artık $p(\bar{v} - \underline{v})$ olması olduğunu fark edin.

Aşağıdaki şekilde, noktalı çizgiler tam negatif korelasyon altındaki koşulları, kesikli çizgiler ise yeni koşulları göstermektedir.

Şekil 10

Farklı Korelasyonlar Altında Verimli Ağlar



Farklı toplulukların gerçekleşen gelirleri arasındaki korelasyon arttıkça, yani p azaldıkça, tüm koşulların kesişim noktası $2c_L = c_H$ çizgisi boyunca orijine doğru hareket eder. Sonuç olarak, sigortasız ve tam sigortalı arasındaki kazanç artık daha küçük olduğundan boş ağın verimli olduğu bölge genişler. Tam eşleşmelerin ve minimal yol ağlarının verimliliği olduğu bölgeler küçülür. Aşırı durumda, $p = 0$ olduğunda, beklenen fayda $\underline{v}$ 'de sabittir ve boş ağ tüm $c_L, c_H > 0$ değerleri için tek verimli ağ olur.

İkili kararlı ağların kümesi de benzer şekilde değişir. Bağlantıların maliyetleri üzerindeki tüm koşullar artık p ile çarpılır. Aşağıdaki sonuçta Önerme 12'deki bu değişiklikler belirtilmiştir.

Sonuç 15 *Risk paylaşım ağında,*

- i. *eğer $c_H > p(\bar{v} - \underline{v})$ ise, boş ağ tek ikili kararlı ağdır,*
- ii. *eğer $c_H \leq p(\bar{v} - \underline{v})$ ise, tüm tam eşleşmeler ikili kararlıdır ancak başka ikili kararlı ağlar da vardır. Tüm bileşenleri sıradan olmayan, dengeli ve indirgenemez olan herhangi bir ağ $\mathbf{g}$ eğer $c_H \leq p(\bar{v} - EU^*(\mathbf{g}))$ ise ikili kararlıdır,*
- iii. *eğer $c_H \leq p(\bar{v} - \underline{v})$ ve $c_L \leq p(\bar{v} - EU(n-1, n))$ ise, asgari patika ağı ikili kararlıdır.*

Son olarak, dinamik ağ oluşturma süreci $c_H > p(\bar{v} - \underline{v})$ ise boş ağda durur ve $c_H \leq p(\bar{v} - \underline{v})$ ise tam eşleşmede durur.

Sonuç 16 $\{\mathbf{g}^t\}_{t=0}^\infty$ *ağlar dizisi bölüm 3.4'te tanımlanan süreç olsun. Eğer $c_H \leq p(\bar{v} - \underline{v})$ ise, o zaman tüm $t \geq \bar{t}$ için $\mathbf{g}^t = \mathbf{m}$ olacak şekilde bir $\bar{t}$ vardır ve $\mathbf{m}$ tam eşleşmedir. Eğer $c_H > p(\bar{v} - \underline{v})$ ise, tüm $t > 0$ için $\mathbf{g}^t = \mathbf{g}^\emptyset$ olur.*

$p = 1$ olduğunda, tam negatif korelasyon, risk paylaşım ağına katılmanın kazancı en yüksektir: $\bar{v} - \underline{v}$. p azaldıkça, bu kazanç da azalır. Bu nedenle, boş ağın verimli, ikili kararlı ve dinamik kararlı olduğu maliyet bölgeleri genişler, yani bireylerin risk paylaşım ağına katılması için daha az teşviki vardır. Tam pozitif korelasyon varsayıldığı aşırı örnekte ise, boş ağın tek verimli, ikili kararlı ve dinamik kararlı ağ haline geldiğinden, risk paylaşım ağlarına katılmak için hiçbir teşvik kalmaz.

3.6 Toplam Risk Altında Risk Paylaşım Ağları

Bu bölümde, ölçüt modelin farklı bir genellemesini ele alıyoruz. İki toplulukta farklı sayıda insanın olduğu risk paylaşım ağlarını ele alıyoruz ancak yine tam negatif korelasyon varsayıyoruz. Toplulukların boyutları aynı olmadığında, bireyler yalnızca gelir riskiyle karşı karşıya kalmaz, aynı zamanda toplam risk de vardır. Toplam risk ile kastettiğimiz topluluklardaki birey sayıları eşit olmadığında artık her iki toplulukta tüm bireylerin tam sigortaya erişiminin mümkün olmamasıdır. Yani, artık, bireylerin karşı karşıya olduğu riskten risk paylaşım ağları katılarak tam olarak kaçınılamamaktadır.

Bu bölümde daha önceden yaptığımız tanımlarda bazı değişiklikler yapmamız gerekiyor. Genelliği kaybetmeden, B topluluğunun A topluluğundan $k > 0$ daha fazla bireye sahip olduğunu, yani $\hat{N}^A = \{1, \dots, n\}$ ve $\hat{N}^B = \{n, \dots, 2n + k\}$ olduğunu varsayıyoruz. $\hat{N} = \{1, \dots, 2n + k\}$ üzerindeki tüm ağların kümesini $\hat{\mathcal{G}} = \{\hat{\mathbf{g}} \in \{0, 1\}^{(2n+k) \times (2n+k)} : \hat{g}_{ij} = 1 \iff \hat{g}_{ji} = 1\}$ ile gösteriyoruz. Bir ağ $\hat{\mathbf{g}} \in \hat{\mathcal{G}}$ için ve B topluluğundan bireylerinin k boyutundaki bir altkümesi $\overline{N}^B$ için $N \setminus \overline{N}^B$ ile sınırlı $\mathbf{g} := \hat{\mathbf{g}}|_{N \setminus \overline{N}^B}$ alt ağının $2n$ bireyden oluşan bir ağ olduğunu ve önceki bölümlerde tanımladığımız ağlar kümesinin bir elemanı, $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$, olduğunu fark edin. Dolayısıyla bu bölümde ne zaman $2n$ kişi üzerine kısıtlanmış bir alt ağdan bahsetsek notasyondaki şapka işaretini kullanmayı bırakacağız.

Topluluk B 'nin herhangi bir k alt kümesi $\overline{N}^B$ için bu kümedeki tüm k bireylerin sıradan bir bileşende bulunduğu ağların kümesini şu şekilde tanımlarız: $\hat{\mathcal{G}}(\overline{N}^B) = \{\hat{\mathbf{g}} \in \hat{\mathcal{G}} : \{i\} \in \mathcal{S}(\hat{\mathbf{g}}) \text{ tüm } i \in \overline{N}^B\} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$

Şimdi taş eşleşmeler ve asgari patika ağları tanımlarını güncelleyebiliriz. Bu bölümde, farklı topluluklardan birbirleriyle eşleşen n birey çifti ve B topluluğundan hiç kimse ile bağlantısı olmayan k birey varsa, but tip ağları $\hat{\mathbf{m}}$ ile gösteriyor ve tam eşleşme olarak adlandırıyoruz. Teknik tanım verirse, $\hat{\mathbf{m}}$ ağını; $\hat{N}^B$ 'nin bir k boyutlu altkümesi $\overline{N}^B$ için $\hat{\mathbf{m}} \in \hat{\mathcal{G}}(\overline{N}^B)$ ise ve $\mathbf{m} := \hat{\mathbf{m}}|_{\hat{N} \setminus \overline{N}^B}$ tam eşleşme ise, tam eşleşme olarak adlandırıyoruz. $\hat{\mathbf{g}}$ ağını; $\hat{N}^B$ 'nin bir k boyutlu alt kümesi $\overline{N}^B$ için $\hat{\mathbf{g}} \in \hat{\mathcal{G}}(\overline{N}^B)$ ve $\mathbf{g} := \hat{\mathbf{g}}|_{\hat{N} \setminus \overline{N}^B}$ ise, *asgari $2n$ -patika ağı* olarak adlandırıyoruz. Benzer şekilde, $r \leq k$ için, $\hat{\mathbf{g}}$ ağını; $\hat{N}^B$ kümesinin r boyutunda bir alt kümesi $\overline{N}^B$ varsa öyle ki her $i \in \overline{N}^B$, $\hat{\mathbf{g}}$ 'nin sıradan bir bileşende ve $\mathbf{g}|_{\hat{N} \setminus \overline{N}^B}$ 'nin yalnızca bir topluluklar arası bağlantısı olan bir patika ağı olması durumunda, *asgari $(2n + r)$ -patika ağı* olarak adlandırıyoruz.

Sonraki iki bölümde, $\hat{\mathcal{G}}$ ağ kümesi üzerinde toplam risk altında ikili kararlı ve verimli risk paylaşım ağları hakkında sonuçları sunuyoruz.

3.6.1 Toplam Risk Altında İkili Kararlı Ağlar

Toplam risk altında risk paylaşım ağlarında, ikili kararlı ağlar kümesi biraz değişir. Eğer $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ise, boş ağ hala tek ikili kararlı ağıdır. Eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise, toplam risk altındaki ikili kararlı ağlar kümesi, toplam risk içermeyen ikili kararlı ağlar kümesinden biraz farklı olacaktır.

İkinci durumdaki farkı açıklamadan önce, Bölüm 3.3'deki Lemmaların, toplam risk altında nasıl değiştiğiyle başlayalım. Lemma 9 ve 10'daki sonuçlar, toplam risk altındaki risk paylaşım ağlarında da aynen geçerlidir, yani toplam risk altında ikili kararlı bir risk paylaşım ağında, tüm bileşenler asgari bağlıdır ve tüm sıradan olmayan bileşenler dengeli ve indirgenemezdir. Lemma 11'deki, ikili kararlı bir ağda

sıradan bileşen olmadığını belirten sonuç biraz değişir. Lemma 11, aslında, Lemma 10'in doğrudan bir sonucudur, ancak her iki toplulukta da aynı sayıda birey olduğu varsayımına dayanır. Lemma 11'in ardındaki argüman, ikili kararlı bir ağda, tüm sıradan olmayan bileşenler dengeli olduğundan³⁴, tüm sıradan olmayan bileşenlerdeki A ve B topluluklarındaki birey sayılarının toplamı aynı olmasıdır. Bu tip dengeli ve sıradan olmayan bileşenlerin sayısına p diyelim. O zaman her toplulukta $n - p$ sıradan bileşen vardır³⁵. Son olarak, Lemma 11, topluluklar arası bağlantıların maliyeti küçük olduğunda, farklı topluluklardan sıradan bileşenlerden herhangi iki bireyin bağlantı eklemeye teşviki olduğu sonucuna varır. Fakat B topluluğunda ek k birey olduğunda, her iki toplulukta aynı sayıda sıradan bileşen olduğu sonucuna varamayız, bunun yerine artık A topluluğunda $n - p$ sıradan bileşen ve B topluluğunda $n + k - p$ sıradan bileşen vardır. Ancak A topluluğundaki $n - p$ sıradan bileşenindeki her bir birey, B topluluğundaki $n + k - p$ sıradan bileşenindeki herhangi bir bireyle bağlantı ekleme konusunda hala teşvike sahiptir. Bu nedenle, iki topluluktaki birey sayısı farklı olduğunda, $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise, hepsi B topluluğundan olmak üzere tam olarak k sıradan bileşen olacaktır. Aşağıdaki Lemma'da, bu sonucu ifade ediyoruz.

Lemma 17 *İkili kararlı bir risk paylaşım ağında tüm bileşenler asgari bağlıdır ve tüm sıradan olmayan bileşenler dengeli ve indirgenemezdir. Eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise, ikili kararlı bir ağda, her biri B topluluğundan olmaz üzere tam olarak k adet sıradan bileşen vardır.*

Lemma 17'nin önemli sonucu, toplam risk altında ikili kararlı bir ağda, tüm bireylerin gelir riskine karşı sigortalanmasının mümkün olmadığı ve B topluluğundaki k bireyin gelir riskine karşı hiç bir sigortaya sahip olmadığıdır.

Eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise, toplam risk altında ikili kararlı ağlar aşağıdaki prosedür izlenerek bulunabilir: Herhangi bir c_L ve c_H için, toplam risk olmadığı durumda ikili kararlı olan herhangi bir $\mathbf{g}$ ağını alın ve hepsi B topluluğundan olan k tane sırada bileşen ekleyin. Bu sıradan bileşenleri eklerken, B topluluğunun bireyleri yeniden adlandırabilirsiniz; yani, k sıradan bileşen mutlaka $2n + 1$ ile $2n + k$ arasındaki bireyler olmak zorunda değildir. Bu yeni ağ, aynı c_L ve c_H değerleri için toplam risk altında ikili kararlı olacaktır. Daha net olmak gerekirse, $\bar{\mathcal{G}} \subset \hat{\mathcal{G}}$ 'nin, herhangi bir $\hat{\mathbf{g}} \in \bar{\mathcal{G}}$ için, yalnızca B topluluğundan bireyler içeren k sıradan bileşen içeren ve diğer tüm bileşenlerin sıradan olmayan, dengeli ve indirgenemez olduğu ağlar kümesi olduğunu varsayalım. Yani, herhangi bir $\hat{\mathbf{g}} \in \bar{\mathcal{G}}$ için, bileşen kümesi $\mathcal{S}(\hat{\mathbf{g}}) = \{S_1, \dots, S_p, \{i_1\}, \dots, \{i_k\}\}$ şeklinde yazılabilir öyle ki $S_1, \dots, S_p$ hepsi dengeli ve

³⁴Tüm sıradan olmayan bileşenlerde, her iki topluluktan aynı sayıda birey vardır.

³⁵Bu argüman, topluluk B 'de k ek birey olduğunda geçerli olamaz.

indirgenemez bileşenler ve $i_1, \dots, i_k \in N^B$ 'dir. Aşağıdaki önerme, toplam risk altında tüm ikili kararlı risk paylaşım ağlarını göstermektedir.

Önerme 18 *Toplam risk altında risk paylaşım ağlarında,*

- i. *eğer $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ise, boş ağ tek ikili kararlı ağdır,*
- ii. *eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise, tüm tam eşleşmeler ikili karardır ancak başka ikili kararlı ağlarda vardır. Eğer $c_H \leq \bar{v} - EU^*(\hat{\mathbf{g}})$ ise herhangi bir $\hat{\mathbf{g}} \in \bar{\mathcal{G}}$ ağı ikili karardır,*
- iii. *eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_L \leq \bar{v} - EU(n-1, n)$ ise, asgari $2n$ -patika ağı ikili karardır.*

Toplam risk varsayımı eklediğimizde, toplu riskin yokluğunda ikili kararlı olan tüm ağlar ($2n$ birey için), her biri B topluluğundan bir birey içeren ek k sıradan bileşen eklersek hala ikili karardır. Bu k bireyin sıradan bileşenlerdeki kimlikleri üzerinde bir kısıtlama yoktur. Topluluk B 'deki daha yüksek nüfusun nedeni göç ise bu bireyleri tanımlayabiliriz, o zaman bu k birey yeni göçmenlerdir ve tam sigortadan yararlanamazlar. Alternatif olarak, ağların Bölüm 3.4'te olduğu gibi dinamik olarak oluşturulduğunu varsayarsak, bu k birey, rastgele seçilen bağlantılara dahil olmayan bireylerdir.³⁶

³⁶Her ne kadar dinamik ağ oluşumu sürecinde bağlantıların rastgele seçildiğini varsaymış olsak ta süreci bireylerin (pozitif olasılıkla) rastgele seçildiği ve seçilen bireyin yeni bir bağlantı eklemek için bir başka birey seçtiği veya bağlantı silmek (gerçi süreç bir kez başladığında hiç bir bağlantı silinmemektedir) için bağlantılı olduğu bireylerden birisini seçtiği bir süreç olarak da tanımlayabiliriz. Bu durumda bu k birey, süreç bir ağa yakınsamadan önceki adımlarda rastgele olarak seçilmemiş ve bu adımlarda seçilen birey tarafından bir bağlantı kurmak için teklifte bulunulmamış kişiler olacaktır.

3.6.2 Toplam Risk Altında Verimli Ağlar

Bu bölümde ise toplam risk altında verimli ağları inceleyeceğiz. Önceki bölümdeki toplam risk altında ikili kararlı ağ sonuçları göz önüne alındığında, yüksek nüfuslu topluluktaki ek bireylerin risk paylaşım ağına erişimi olmadığı ve herhangi bir sigortasının olmadığı görülmektedir. İkili kararlı ağların aksine, verimli ağlar söz konusu olduğunda, bağlantılar üzerine bireylerin kararlarından ziyade toplam refahın maksimize edilmesi odak noktası olduğu için genel $k > 0$ değeri için verimli ağların tam karakterizasyonu çok daha karmaşık olacaktır. Çünkü her k değeri için farklı maliyet kısıtları altında bir çok ağ verimli ağ olarak ortaya çıkacaktır. Dolayısıyla sonuçların ifade edilmesi basitleştirmek ve aynı zamanda ana fikri verebilmek için $k = 1$ olduğunu varsayacağız. Dikkatimizi, tüm bireylerin risk paylaşımına dahil olduğu etkin ağların olup olmadığına ya da tüm etkin risk paylaşım ağlarından tüm bireylerin sigortaya erişimin olup olmadığına odaklıyoruz. Bazı bireyler hiç bir bağlantıya sahip olmayabildiği ikili kararlı ağların aksine bazı verimli ağlarda her iki topluluktan da tüm bireyler sıradan olmayan bazı bileşenlere dahil olduklarını göstereceğiz. Fakat bu durumda dahi tüm bireyler tam sigortaya erişememektedir. Bu bölüm sonunda varılan sonuçların $k > 1$ durumlarında geçerli olduğu ve bu durumdaki verimli ağların yapıları hakkında yeterli bir fikir vereceğine inamıyoruz.

Verimli ağları incelemeden önce, Lemma 6 ve 7'in sonuçlarının toplam risk altındaki risk paylaşım ağlarına da uygulanabileceğini belirtelim.

Lemma 19 *Toplam risk altındaki risk paylaşım ağlarında verimli bir ağda gereksiz bağlantı yoktur, sıradan olmayan tüm bileşenlerde her iki topluluktan bireyler vardır ve toplulukları bağlayan tek bir topluluklar arası bağlantı vardır. Dahası $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ ise tüm sıradan bileşenler aynı topluluktandır. .*

Topluluk B' 'den herhangi bir i bireyini seçelim: $n + 1 \leq i \leq 2n + 1$. Bu bireyin hiç bağlantısı olmadığı, her $j \in \hat{N}$ için $\hat{g}_{ij} = 0$, ağlar kümesi ele alalım. Bu kümeyi $\hat{\mathcal{G}}(i) = \{\hat{\mathbf{g}} \in \hat{\mathcal{G}} : \{i\} \in \mathcal{S}(\hat{\mathbf{g}})\}$ ile gösterelim. Bu kümedeki her bir $\hat{\mathbf{g}} \in \hat{\mathcal{G}}(i)$ ağı için $\hat{\mathbf{g}}|_{\hat{N} \setminus \{i\}}$ ağı $2n$ kişiye kısıtlanmış bir alt ağdır. Yani, $2n$ birey üzerinde tanımlı $\mathcal{G}$ ağlar kümesi ile $2n + 1$ birey üzerinde tanımlı $\hat{\mathcal{G}}(i)$ ağlar kümesi arasında bire bir fonksiyon vardır. Bu bire bir fonksiyon sayesinde toplam risk altında tüm verimli ağları ortaya çıkarabiliriz. Bunun için tek yapmamız gereken herhangi bir bileşene i bireyini ekleyerek toplam refahı artırıp artıramayacağımızı kontrol etmektir. Üç tür verimli ağlardan, tam eşleşme ve asgari patika ağına i bireyini eklemek toplumsal refahı arttırabilir. Boş ağı verimli olduğu maliyet kısıtlarını ise daha sonra inceleyeceğiz.

Tam eşleşme $\widehat{\mathbf{m}}$ 'deki n bileşenden birine i bireyini eklersek, böylece 2 birey içeren $n - 1$ bileşen ve i 'de dahil olmak üzere üç birey içeren boyutta tek bir bileşen elde edersek, yeni ağa $tam+1$ eşleşme adını veririz. i bireyinin dahil olduğu bileşendeki diğer 2 kişinin faydası $\bar{v}$ 'den $EU(1, 2)$ 'ye düşecek ve i bireyinin faydası $\underline{v}$ 'den $EU(1, 2)$ 'ye yükselecektir. Dolayısıyla, $\widehat{\mathbf{m}}$ ağından $\widehat{\mathbf{m}}^{+1}$ 'a geçerse toplam fayda

$$2[EU(1, 2) - \bar{v}] + EU(1, 2) - \underline{v}$$

kadar değişecektir. Bu durumda

$$\begin{aligned} W(\widehat{\mathbf{m}}^{+1}) > W(\widehat{\mathbf{m}}) &\iff 2c_L < 2[EU(1, 2) - \bar{v}] + EU(1, 2) - \underline{v} \\ &\iff 2c_L < 3EU(1, 2) - 2\bar{v} - \underline{v} \end{aligned}$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafı, beklenen fayda tam artan ve tam içbükey olduğunda tam pozitiftir³⁷. Maliyetler üzerine bu yeni kısıt Şekil 11'de mavi kesik çizgilerle gösterilmiştir. Mavi kesik çizginin üstünde B topluluğundan ek bireyin risk paylaşım ağına dahil olamadığı tam eşleşme verimli iken eğer topluluk içi maliyet mavi kesik çizgi ile belirtilen seviyenin altına düşerse bu bireyin de risk paylaşımına katıldığı $tam+1$ eşleşme verimli olacaktır. Eğer B topluluğunda birden fazla ek birey olursa tam eşleşme bölgesi her ek bireyin bileşene katıldığı durumlardaki maliyet kısıtlarını gösteren daha fazla alt bölgeye bölünecektir.

Asgari patika ağlarına i bireyini ayrı bir bileşen olarak eklersek bu ağa asgari $(2n)$ -patika ağı diyoruz ve i bireyini ağdaki var olan tek bileşene dahil edersek bu ağa asgari $(2n + 1)$ -patika ağı adını veriyoruz. Asgari $(2n)$ -patikadan asgari $(2n + 1)$ -patika ağına geçtiğimizde yeni eklenen i bireyinin faydası $\underline{v}$ 'den $EU(n, n + 1)$ 'e yükselecek ve geri kalan $2n$ kişinin faydası ise $\bar{v}$ 'den $EU(n, n + 1)$ 'e düşecektir. Beklenen faydadaki değişim

$$2n[EU(n, n + 1) - \bar{v}] + EU(n, n + 1) - \underline{v}$$

kadar olacaktır. Bu durumda aşağıdaki ilişki kurulabilir.

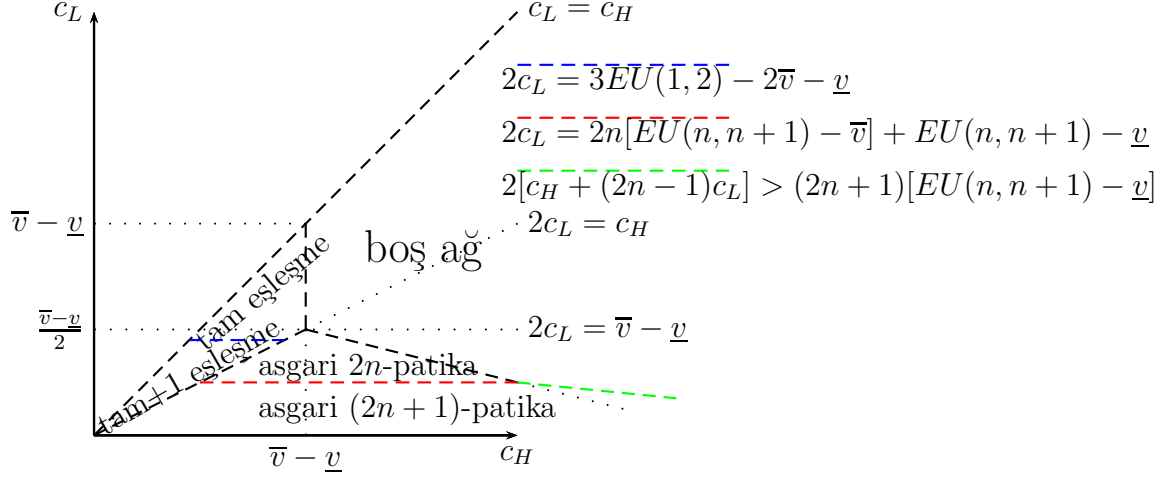
$$W(\mathbf{g}^{2n+1}) > W(\mathbf{g}^{2n}) \iff 2c_L < (2n + 1)EU(n, n + 1) - 2n\bar{v} - \underline{v}$$

³⁷ Bunu görmek için, tam artan ve tam içbükey bir fayda fonksiyonu v için $(y_L, v(y_L))$ ve $(\bar{y}, \bar{v})$ koordinatlarını ve $(\bar{y}, \bar{v})$ ve $(y_H, v(y_H))$ koordinatlarını düz bir çizgiyle birleştiren ve $(\bar{y}, \bar{v})$ 'in köşe noktası olan yeni bir w fonksiyonunu düşünün. Tüm y için $w(y) < v(y)$ olacaktır. Eğer yukarıdaki denklemde v 'yi w ile yer değiştirirsek denklemin sağ tarafı sıfır olacaktır. Fakat $w(y) < v(y)$ olduğundan denklemin sağ tarafı tam pozitif olacaktır.

Denklemden eşitsizliğin sağ tarafında ifade dipnot 37'deki argümana göre tam pozitiftir. Bu kısıt Şekil 10'da kırmızı kesik çizgilerle belirtilmiştir.

Şekil 11

Tam Risk Altında Farklı Maliyetler için Verimli Ağlar



Boş ağın verimliliğine gelecek olursak, Önerme 8'e göre gerekli maliyet kısıtları altında boş ağ tek verimli ağdır ve toplam refah tam eşleşme ve asgari 2n-patika dahil olmak üzere diğer tüm olası ağlardan yüksektir. Dolayısıyla sadece boş ağda toplam refahın asgari patika ağlarından yüksek olup olmadığını kontrol etmemiz yetecektir. Aşağıdaki denklemler boş ağdaki toplam refahın iki tür asgari ağdan yüksek olması için gerekli maliyet kısıtlarını gösteriyor.

$$W(\mathbf{g}^\emptyset) > W(\mathbf{g}^{2n}) \iff c_H + 2(n-1)c_L > n(\bar{v} - \underline{v})$$

$$W(\mathbf{g}^\emptyset) > W(\mathbf{g}^{2n+1}) \iff 2[c_H + (2n-1)c_L] > (2n+1)[EU(n, n+1) - \underline{v}]$$

İkinci satırdaki maliyet kısıtı Şekil 11'de yeşil kesik çizgilerle³⁸ gösterilmiştir.

B topluluğunda fazladan bir birey olduğunda asgari patika ağlarından bu bireyin risk paylaşımına katılamadığı ağ olan asgari 2n-patika topluluk içi maliyet eğer kırmızı kesik çizginin üzerinde ise verimli olacaktır. Topluluk içi maliyet kırmızı kesik çizgi ile belirtilen kısıtın altına düştüğünde ise bu birey risk paylaşım ağına katılması verimli olacaktır. Bu ağda i bireyinin var olan tek bileşene katılması ile artık her iki topluluktaki bireylerde tam sigortaya erişimini kaybedecek fakat maliyetler yeterince düşük olduğu için yeni bireyin fayda artışı bu kaybı karşılamaya yetecektir. Toplam

³⁸Bu eşitsizliklerin tek bir kesişim noktasının olduğunu kolayca kontrol edilebilir.

risk altında asgari $2n + 1$ -patika ağında artık tam sigortaya erişim olmadığı için boş ağlar kıyaslandığında boş ağın verimli olduğu bölge küçülecektir. Nitekim asgari $2n + 1$ -patika ağı Şekil 11'de kırmızı ve yeşil kesik çizgilerin altında kalan bölgede verimli olacaktır. Görüleceği gibi asgari patikaların verimi olduğu alan daha büyük olacaktır.

Eğer B topluluğunda birden fazla ek birey olursa her yeni bireyin asgari patikadaki bileşene dahil olduğu durumlar için şekilde görülen kırmızı kesik çizgilere paralel yeni kısıtlar oluşacaktır. Ayrıca bu kısıtlar için her seferinde eğimi giderek azalan yeni yeşil kesik çizgiler gibi kısıtlar oluşacaktır.

Sonuç olarak toplam risk altında tüm bireylerin tam sigortaya erişmesi mümkün olmamaktadır. Tam eşleşmelerin verimli olduğu maliyet kısıtlarında en azından her iki topluluktan da $n - 1$ birey çifti birbirleri ile bağlantı kurarak tam sigortaya erişebilmektedir. Asgari patika ağlarında ise B topluluğundaki bireylerin tamamı risk paylaşım ağlarına katıldığından geri kalan tüm birey tam sigortaya erişimlerini kaybetmektedirler.

4 Sonuç

Bölüm 2’de, ampirik çalışmalarda gösterildiği üzere arkadaşlar arasındaki davranışlardaki benzerliklerin arkadaş olmayanlara kıyasla yüksek olduğunu ifade eden homofiliyi çalıştığımız arkadaşlık ağlarını inceledik. Ön seçim davranışlardaki benzerliklerin bireylerin arkadaşlarını benzerliklere göre seçtiğinden kaynaklandığını iddia ederken sosyalleşme bireyler arkadaşlıklarını kurduktan sonra davranışlarının birbirine benzemesinden kaynaklandığını iddia eder. Gözlemlenen benzerliklerin sebebi olarak öne sürülen ön seçim ve sosyalleşme etkilerini gösteren bir arkadaşlık modeli kurduk. Bireylerin arkadaşlarını seçmek ve arkadaşlarıyla karşılıklı öneme sahip bir davranışa karar vermek olmak üzere iki karar verdikleri bir arkadaşlık ağını ele aldık. Bireyler, davranışları ile arkadaşlarının davranışları arasındaki farkı en aza indirerek koordine etmek için davranışlarına karar verirken, aynı zamanda davranışları ile tipleri arasındaki farkı da en aza indirmeye çalışırlar. Bireylerin sahip oldukları tipler, belirli bir davranışa yönelik eğilimlerini yansıtır ve arkadaşları olmadığında bireylerin en uygun davranışlarıdır. Bu durumda, bir bireyin davranışı, hem kendi tipine hem de arkadaşlarının davranışlarına bağlı olacaktır ve bu da stratejik bir etkileşim ortamı yaratır. Bu stratejik etkileşimi yakalayan ve bir Nash dengesinin var olduğunu ve bunun, esasen bir bireyin davranışları üzerindeki geri bildirim etkilerini ağ boyunca takip eden genelleştirilmiş Bonacich-Katz merkezilik ölçüsünün bir fonksiyonu olarak ifade edilebileceğini gösterdik. Nash dengesi için Bonacich-Katz merkezilik ölçüsünden farklı literatürde M-Matrisleri olarak bilinen alternatif bir ifade de sağladık. Ayrıca, herhangi bir ağdaki ortalama denge davranışının herhangi bir tolerans oranı ve akran etkisi değeri için ortalama tiplere eşit olduğunu gösterdik.

Daha sonra, bireylerin arkadaşlık kararlarını ele aldık. Arkadaşlık ağında, bireyler arasında bir arkadaşlık ilişkisine başlamak için karşılıklı onay gerekirken, bir birey tek taraflı olarak bir ilişkiyi sonlandırabilir. Arkadaşlık ağlarının bu yönü, kullandığımız çözüm kavramı olan ikili kararlılık tarafından yakalanır. Bir ağdaki bir bireyin faydası, ağ oyunundaki Nash dengesi altında bireyin faydası olarak belirlenmiştir. İkili kararlı ağların yapısı, ağ oyunlarındaki Nash dengesinin aksine tolerans oranının değerine bağlıdır. Dolayısıyla bir ağın ikili kararlı olup olmadığı kurduğumuz modelin her iki parametresine de bağlıdır. Parametre değerleri yeterince düşük olduğunda, boş ağ, hiçbir bireyin bir bağlantı oluşturmak için teşviki olmadığı için ikili kararlıdır. Parametre değerleri arttıkça bireyler birbirlerine en yakın tipteki bitişik bireylerle bağlantı kurarlar ve diyadik ağlar ikili kararlı olurlar. Bu durum ön seçim ile uyum

içerisindedir. Daha sonra ikili kararlı ağlar bileşenler büyümeye başlar. Bu esnada iki farklı etki görülür. Bir yandan bileşenler arasında sosyalleşme etkilerinden dolayı davranışların birbirine yakınsaması sonucu bileşenlerdeki bağlantı sayıları artarak bileşenler bir klik oluştururken diğer yandan eğer parametre değerleri yeteri kadar yüksek olursa bileşenlerdeki en yakın bireyler bağlantılar kurarak bileşenleri birleştirirler. Nihayetinde parametre değerleri yeteri kadar yükseldiğinde tüm toplum tek bir bileşende birleşir ve parametre değerlerine bağlı olarak bileşen içerisinde bağlantıların sayısı artar ve en son olarak tam ağ ikili kararlı ağ olur.

Gayri resmi risk paylaşım ağları üzerine yapılan ampirik çalışmalarla elde edilen kanıtlar ışığında, risk paylaşımının genellikle aile üyeleri ve arkadaşlar arasında gerçekleştiğini göstermektedir. Bölüm 3'te, iki ayrı toplulukta bulunan bireyler arasındaki gayri resmi risk paylaşım ağlarını inceledik. Bireylerin gelir riskiyle karşı karşıya olduğunu varsaydık. Bireylerin riskten kaçınan bireyler olduğunu ve beklenen faydalarının tam artan ve tam içbükey olduğunu farz ettik. Her bireyin geliri gerçekleştiğinde, bireylerin bir gelir paylaşımı süreci başlattığını düşündük. Bu gelir paylaşım sürecinde bireyler her turda arkadaşlarıyla buluşur ve gelirlerini bir araya getirip eşit olarak paylaşırlar. Her turda, ağda bağlantılı olan herhangi iki birey en az bir kez buluşur. Toplantı turu sonsuza doğru yakınsadıkça, bireylerin gelirlerini yukarıda açıklandığı gibi paylaştıktan sonra elde ettikleri gelir, ait oldukları bileşenin ortalama gelirine yakınsar. Bu süreç sanki bir bileşendeki tüm bireyleri bir araya geldiği ve toplam gelirlerini eşit olarak paylaştığı bir sürece denktir.

Bu süreç ve yakınsama sonucu Bramoullé ve Kranton (2007c)'den alınmıştır. Bu risk paylaşım mekanizmasında dışsallıklar olduğunu fark edilmelidir. Bir birey yalnızca arkadaşlarından değil, arkadaşlarının arkadaşlarından, arkadaşlarının arkadaşlarının arkadaşlarından vb. faydalar elde edebilir. Bu, Bölüm 2'da ele aldığımız arkadaşlık ağlarındaki bireylerin eylemleri üzerindeki geri bildirim etkilerine benzerdir. Sonunda, bir birey ait olduğu bileşendeki tüm bireylerden fayda elde eder. Ayrıca, risk paylaşım mekanizmasının, bireylerin gerçekleşen geliri paylaşırken herhangi bir stratejik karar almasına izin vermediği de fark edilmelidir. Bu, bireylerin muhtemelen nesillere dayanan uzun bir ilişki geçmişine sahip olduğu ve bireylerin başkalarının gelir seviyesini kolayca gözlemleyebildiği küçük köyler arasındaki risk paylaşım ağlarını ele alıyorsak büyük bir kısıtlama değildir. Yani, topluluklar arasındaki risk paylaşım ağında herhangi bir uygulama veya bilgi sorunu beklemiyoruz.

Ampirik çalışmalar, bireylerin tek bir topluluk içinde risk paylaşım ağı aracılığıyla tam sigortaya ulaşamayacağını öne sürdüğünden, aynı topluluktaki bireylerin

gerçekleşen gelirlerinin aynı olduğunu varsaydık. Bu varsayım, bireylerin aynı topluluktaki bireylerle bağlantı kurma konusunda hiçbir teşviki olmadığı için yukarıdaki ampirik gözlemle uyumludur. Ayrıca, topluluklar arasında risk paylaşımının faydalarının maksimum olduğu durum olan tam negatif korelasyon (ki bunu daha sonra gevşettik) olduğunu varsaydık. Herhangi bir yeni bağlantı kurmanın ve mevcut bağlantıları sürdürmenin maliyetli olmasını beklemek doğaldır. Ayrıca topluluklar arası bağlantıların maliyetinin topluluk içi bağlantıların maliyetinden daha yüksek olduğunu varsaydık.

Tam negatif korelasyona ek olarak, toplulukların nüfuslarının aynı olduğunu varsaydık (bu varsayımı da daha sonra gevşettik). Bu ölçüt modelde, tüm bireylerin beklenen faydalarının toplamını maksimize eden verimli ağı ele alıyoruz ve üç çeşit verimli ağ olduğunu gösterdik. Her iki bağlantının maliyeti yüksek olduğunda, boş ağ tek verimli ağ olarak ortaya çıkar. c_L , c_H 'den nispeten yüksek ve c_H , risk paylaşım ağının maksimum kazancından (tam sigorta $\bar{v}$ ile sigortasız $\underline{v}$ arasındaki fark) az olduğunda, verimli ağlar kümesi tam eşleşmeler kümesine eşittir. Böylece bir topluluktaki her birey, farklı topluluktaki tek bir bireyle eşleştirilir. Bu nedenle, her birey gelir riskinden kurtulur. c_L nispeten düşük ve c_H bazı alt ve üst sınırlar içinde olduğunda, verimli ağ kümesi yalnızca asgari patika ağlarını içerir. Tüm bireyler tam sigortaya ulaşsa da, asgari patika ağlarında topluluklar arası tek bir bağlantı vardır. Bu, verimlilik ve ikili kararlılık arasındaki bilinen bir gerilimin örneğidir. Verimli bir ağda, bazı bireyler stratejik olarak bağlantılarından birini seçerek refahlarını artırabilseler bile verimlilik tanımını toplam refahın en üst düzeyde olması ile ilgilenir. Asgari patika ağındaki tek topluluklar arası bağlantıda yer alan iki birey, c_L yeterince küçükse faydalarını artırabilir. Asgari patika ağları, diğer tüm bireylerin kazançları kayıplarından daha fazla olduğu ve kazançlar topluluklar arası bağlantının dışsallıklarından geldiği için çok daha yüksek c_L değerleri için bile verimli olacaktır. Bir bileşendeki bir birey, topluluklar arası bağlantının maliyetine katlanmadan, topluluklar arası bağlantının pozitif dışsallığından yararlanır¹.

Üç tür verimli ağın, her ne kadar başka bazı ikili kararlı ağlar olsa da, ikili kararlı olmaya devam ettiğini gösterdik. Dahası, boş ağın ikili kararlı olduğu maliyet değerleri bölgesi, verimli olduğu bölgeden daha büyüktür ve onu içerir. Aynısı tam eşleşmeler için de geçerlidir. Asgari patika ağları, yalnızca $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ ve c_L yeterince küçük olduğunda ikili kararlı olmaya devam eder. Asgari patika ağlarının bağlantı maliyetleri bölgesindeki azalma, maliyetler yeterince küçük olmadığı sürece bireylerin adalar arası

¹Unutmayın, tüm verimli ağlarda, her iki topluluktan da bireyler varsa, her sıradan olmayan bileşende tam olarak bir topluluklar arası bağlantı olduğunu gösteriyoruz.

bağlantıları silme teşviğiyle ilişkilidir.

Dinamik bir ağ oluşum sürecini ele aldığımızda, sadece iki tür ağ dinamik kararlı olur: boş ağ ve tam eşleşmeler. Dinamik süreç, ikili kararlı olduğu maliyet değerleri için bile asgari patika ağlarına ulaşmaz.

Ölçüt modelin iki genellemesini ele aldık. Birincisi, farklı toplulukların gerçekleşen gelirleri arasında farklı korelasyon seviyelerine izin veriyor. Korelasyon tam negatiften tam pozitif doğru arttıkça, boş ağın verimli, ikili kararlı, dinamik kararlı olması için gerekli bağlantı maliyetleri değerleri kümesinin genişlediğini ve tam pozitif korelasyon olduğunda bağlantı maliyetlerinin tüm olası değerlerine eşit olduğunu gösterdik. Benzer şekilde, diğer verimli, ikili kararlı ve dinamik kararlı ağlar için bölgeler, korelasyon arttıkça küçülür.

Ele aldığımız son genelleme, toplulukların nüfuslarının farklı olabilmesidir. İkili kararlı ağlarda, yüksek nüfuslu topluluktaki ek bireylerin hiçbir bağlantısının olmadığını, dolayısıyla sigorta avantajına erişemediklerini gösterdik. Verimli ağlar da ise sonuç değişir. Tüm bireylerin aynı maliyet değerleri için kısmi sigortaya erişebildiği verimli ağlar vardır.

Kaynakça

- Ambrus, A., Mobius, M., & Szeidl, A. (2012, November). *Consumption Risk-sharing in Social Networks* . (Unpublished manuscript)
- Ballester, C., Calvó-Armengol, A., & Zenou, Y. (2006). Who's Who in Networks. Wanted: The Key Player. *Econometrica*, 74(5), 1403–1417. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-0262.2006.00709.x> doi: 10.1111/j.1468-0262.2006.00709.x
- Ballester, C., Calvó-Armengol, A., & Zenou, Y. (2011). *Education policies when networks matter*. (Unpublished manuscript)
- Ballester, C., Zenou, Y., & Calvó-Armengol, A. (2010). Delinquent Networks. *Journal of the European Economic Association*, 8(1), 34–61. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1111/j.1542-4774.2010.tb00494.x> doi: 10.1111/j.1542-4774.2010.tb00494.x
- Bloch, F., Genicot, G., & Ray, D. (2008). Informal insurance in social networks. *Journal of Economic Theory*, 143(1), 36–58.
- Bloch, F., & Jackson, M. O. (2007). The formation of networks with transfers among players. *Journal of Economic Theory*, 133(1), 83–110. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022053105002413> doi: 10.1016/j.jet.2005.10.003
- Bonacich, P., & Lloyd, P. (2001). Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations. *Social Networks*, 23, 191–201.
- Bramoullé, Y., & Kranton, R. (2007a). Public goods in networks. *Journal of Economic Theory*, 135(1), 478–494. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022053106001220> doi: 10.1016/j.jet.2006.06.006
- Bramoullé, Y., & Kranton, R. (2007b). Risk sharing across communities. *The American Economic Review*, 97(2), 70–74.
- Bramoullé, Y., & Kranton, R. (2007c). Risk-sharing networks. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 64(3–4), 275–294. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016726810700128X> doi: 10.1016/j.jebo.2006.10.004
- Calvó-Armengoi, A., & Zenou, Y. (2004). Social Networks and Crime Decisions: The Role of Social Structure in Facilitating Delinquent Behavior. *International Economic Review*, 45(3), pp. 939–958.

- Calvó-Armengol, A., Patacchini, E., & Zenou, Y. (2009). Peer Effects and Social Networks in Education. *The Review of Economic Studies*, 76(4), 1239–1267. Retrieved from <http://restud.oxfordjournals.org/content/76/4/1239.abstract> doi: 10.1111/j.1467-937X.2009.00550.x
- Cohen, J. M. (1977). Sources of Peer Group Homogeneity. *Sociology of Education*, 50(4), 227–241.
- Debreu, G., & Herstein, I. N. (1953, October). Nonnegative Square Matrices. *Econometrica*, 21(4), 597–607. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/1907925>
- Dubey, P., Garg, R., & Meyer, B. D. (2012). *Competing for Customers in a Social Network*. (<http://ssrn.com/abstract=2055215>)
- Dutta, B., Ghosal, S., & Ray, D. (2005). Farsighted network formation. *Journal of Economic Theory*, 122(2), 143–164. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022053104001279> doi: 10.1016/j.jet.2004.05.001
- Fafchamps, M., & Gubert, F. (2007, July). The formation of risk sharing networks. *Journal of Development Economics*, 83(2), 326–350. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.jdeveco.2006.05.005>; <http://www.sciencedirect.com/s>
- Fafchamps, M., & Lund, S. (2003). Risk-sharing networks in rural Philippines. *Journal of Development Economics*, 71(2), 261–287. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304387803000294> doi: 10.1016/S0304-3878(03)00029-4
- Glaeser, E. L., Sacerdote, B., & Scheinkman, J. A. (1996). Crime and Social Interactions. *The Quarterly Journal of Economics*, 111(2), 507–548. Retrieved from <http://qje.oxfordjournals.org/content/111/2/507.abstract> doi: 10.2307/2946686
- Golub, B., & Jackson, M. O. (2010, February). Naïve Learning in Social Networks and the Wisdom of Crowds. *American Economic Journal: Microeconomics*, 2(1), 112–49. Retrieved from <http://www.aeaweb.org/articles.php?doi=10.1257/mic.2.1.112> doi: 10.1257/mic.2.1.112
- Golub, B., & Jackson, M. O. (2012a). How Homophily Affects the Speed of Learning and Best-Response Dynamics. *The Quarterly Journal of Economics*. Retrieved from

<http://qje.oxfordjournals.org/content/early/2012/05/07/qje.qjs021.abstract>
doi: 10.1093/qje

- Golub, B., & Jackson, M. O. (2012b, July-Dec). Network Structure and the Speed of Learning: Measuring Homophily Based on its Consequences. *Annals of Economics and Statistics*(107/108).
- Goyal, S., & Moraga-González, J. L. (2001). R&D Networks. *The RAND Journal of Economics*, 32(4), pp. 686–707. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2696388>
- Hellmann, T. (2009). Convexity and Complementarity in Network Formation: Implications for the Structure Pairwise Stable Networks. *IMW Working Paper*.
- Helsley, R. W., & Zenou, Y. (2011, February). *Social Networks and Interactions in Cities* (Tech. Rep.). IZA Discussion Paper No. 5506. Retrieved from http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1765672
- Horn, R. A., & Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.
- Jackson, M. O., & Watts, A. (2001). The Existence of Pairwise Stable Networks. *Seoul Journal of Economics*, 14(3).
- Jackson, M. O., & Watts, A. (2002). The Evolution of Social and Economic Networks. *Journal of Economic Theory*, 106(2), 265–295. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022053101929035>
doi: 10.1006/jeth.2001.2903
- Jackson, M. O., & Wolinsky, A. (1996). A Strategic Model of Social and Economic Networks. *Journal of Economic Theory*, 71(1), 44–74. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022053196901088>
doi: 10.1006/jeth.1996.0108
- Jackson, M. O., & Zenou, Y. (2012, September). Games on Networks. *CEPR Discussion Paper No. DP9127*. Retrieved from http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2153568
- Kandel, D. B. (1978). Homophily, Selection, and Socialization in Adolescent Friendships. *American Journal of Sociology*, 84(2), pp. 427–436. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2777857>
- Karlan, D., Mobius, M., Rosenblat, T., & Szeidl, A. (2009). Trust and social collateral. *The Quarterly Journal of Economics*, 124(3), 1307–1361.
- Knocke, D. (1990). Networks of political action: toward theory construction. *Sociological Forces*, 68, 1041–1063.
- Koenig, M., Liu, X., & Zenou, Y. (2012). *Identifying key player in R&D alliance networks*. (Unpublished manuscript)

- Koenig, M., Tessone, C. J., & Zenou, Y. (2011). A Dynamic Model of Network Formation with Strategic Interactions [Research Papers in Economics]. Retrieved from <http://ssrn.com/abstract=1507517>
- Krackhardt, D. (1990). Assessing the Political Landscape: Structure, Cognition, and Power in Organizations. *Administrative Science Quarterly*, 35(2), 342–369. Retrieved 2024-09-04, from <http://www.jstor.org/stable/2393394>
- Lazarsfeld, P. F., & Merton, R. K. (1954). Freedom and Control in Modern Society. In T. Abel, M. Berger, & C. Page (Eds.), (pp. 18–66). Van Nostrand.
- McCabe, S. E., Schulenberg, J. E., Johnston, L. D., O'Malley, P. M., Bachman, J. G., & Kloska, D. D. (2005). Selection and socialization effects of fraternities and sororities on US college student substance use: a multi-cohort national longitudinal study. *Addiction*, 100, 512–524.
- McDonald, J., Neumann, M., Schneider, H., & Tsatsomeros, M. (1995). Inverse M-matrix inequalities and generalized ultrametric matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 220(0), 312–341. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002437959400077Q> (Nonnegative Matrices, Applications and Generalizations and the Eighth Haifa Matrix Theory Conference) doi: 10.1016/0024-3795(94)00077-Q
- McPherson, M., Smith-Lovin, L., & Cook, J. M. (2001). Birds of a Feather: Homophily in Social Networks. *Annual Review of Sociology*, 27, pp. 415–444. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2678628>
- Miller, D. A., & Ali, S. N. (n.d.). *Enforcing Cooperation in Networked Societies* [2009 Meeting Papers]. Retrieved from <http://ideas.repec.org/p/red/sed009/115.html> (Unpublished manuscript)
- Morris, S. (2000). Contagion. *The Review of Economic Studies*, 67(1), 57–78. Retrieved from <http://restud.oxfordjournals.org/content/67/1/57.abstract> doi: 10.1111/1467-937X.00121
- Murgai, R., Winters, P., Sadoulet, E., & de Janvry, A. (2002). Localized and incomplete mutual insurance. *Journal of Development Economics*, 67(2), 245–274. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304387801001894> doi: 10.1016/S0304-3878(01)00189-4
- Patacchini, E., Rainone, E., & Zenou, Y. (2011, January). *Dynamic Aspects of Teenage Friendships and Educational Attainment* (Research Papers in Economics No. 2011:4). Stockholm University, Department of Economics. Retrieved from

http://ideas.repec.org/p/hhs/sunrpe/2011_0004.html

- Patacchini, E., & Zenou, Y. (2012). Juvenile Delinquency and Conformism. *Journal of Law, Economics, and Organization*, 28(1), 1–31. Retrieved from <http://jleo.oxfordjournals.org/content/28/1/1.abstract> doi: 10.1093/jleo
- Plemmons, R. (1977). M-matrix characterizations.I—nonsingular M-matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 18(2), 175–188. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379577900738> doi: 10.1016/0024-3795(77)90073-8
- Rosenzweig, M. R., & Stark, O. (1989, August). Consumption Smoothing, Migration, and Marriage: Evidence from Rural India. *Journal of Political Economy*, 97(4), 905–926. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/1832196>
- Sundaram, R. K. (2005). *A First Course in Optimization Theory* (9th ed.). Cambridge University Press.
- Townsend, R. M. (1994). Risk and Insurance in Village India. *Econometrica*, 62(3), pp. 539–591. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2951659>
- Udry, C. (1995). Risk and Saving in Northern Nigeria. *The American Economic Review*, 85(5), pp. 1287–1300.
- Weerdt, J. D., & Dercon, S. (2006). Risk-sharing networks and insurance against illness. *Journal of Development Economics*, 81(2), 337–356. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304387806000666> doi: 10.1016/j.jdeveco.2005.06.009

A Sosyalleşme, Ön Seçim ve Kararlı Ağlar

Teorem 1'in ispatına geçmeden önce, teoremin ikinci bölümündeki $\mu < 1$ koşulunu tartışacağız. Bir ağ $\mathbf{g}$ ve buna karşılık gelen ağırlık matrisi $\mathbf{h}$ verildiğinde, $\rho(\mathbf{h}) = \max\{|\lambda| : \lambda, \mathbf{h} \text{ matrisinin özdeğeridir}\}$, $\mathbf{h}$ matrisinin spektral yarıçapıdır. Geometrik serilerin sonsuz toplamı $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{h}^k$ eğer $\mu < \frac{1}{\rho(\mathbf{h})}$ ise sonlu bir değere yakınsar ve $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{h})^{-1}$ 'e eşit olur. Debreu ve Herstein (1953)'ün III^* teoremi, $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{h})^{-1}$ 'in iyi tanımlanmış olduğunu ve eğer $\mu < \frac{1}{\rho(\mathbf{h})}$ ise negatif olmadığını ortaya koyar. Nash dengesini Bonacich-Katz merkeziet ölçüsü cinsinden ifade edebilmek için $\mu < \frac{1}{\rho(\mathbf{h})}$ koşuluna ihtiyacımız var

$\rho(\mathbf{h})$ 'nin hem $\mathbf{g}$ 'ye hem de μ 'ya bağlı olduğunu fark edilebilir. $\mu < \frac{1}{\rho(\mathbf{h})}$ 'nin ancak ve ancak $\mu < 1$ ise olduğu ortaya çıkar.

Lemma 20 *$\mathbf{g}$ boş ağdan farklı herhangi bir ağ ve $\mathbf{h}$ bir μ değerine karşılık gelen ağırlık matrisi olsun. O zaman $\mu < \frac{1}{\rho(\mathbf{h})}$ ancak ve ancak $\mu < 1$.*

İspat. $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ boş ağdan farklı bir ağ ve $\mu < 1$ olsun. $d_{\min} = \min_i d_i(\mathbf{g})$ ve $d_{\max} = \max_i d_i(\mathbf{g})$ olsun. $\mathbf{g}$ boş ağdan farklı olduğundan $d_{\max} \geq 1$ 'dir.

$h_{ij} = \frac{1}{1-\mu+\mu d_i(\mathbf{g})} g_{ij}$ olarak tanımlanan ağırlık matrisi $\mathbf{h}$ negatif olmayan bir matristir. Horn ve Johnson (1985)'un Teoremi 8.1.22'ye göre ¹ aşağıdaki ifade doğrudur.

$$\frac{\mu d_{\min}}{1 - \mu + \mu d_{\min}} \leq \rho(\mathbf{h}) \leq \frac{\mu d_{\max}}{1 - \mu + \mu d_{\max}}$$

$\frac{\mu d}{1-\mu+\mu d}$ oranı d arttıkça arttır (yani üst sınır alt sınırdan büyüktür. Yukarıdaki ifadeden şunu elde ederiz.

$$\frac{1 - \mu + \mu d_{\max}}{\mu d_{\max}} \leq \frac{1}{\rho(\mathbf{h})}$$

Fakat, $\mu < \frac{1-\mu+\mu d_{\max}}{d_{\max}}$ ancak ve ancak $\mu < 1$; bunun doğal sonucu olarakta $\mu < \frac{1}{\rho(\mathbf{h})}$ ancak ve ancak $\mu < 1$ ise olur. ■

¹ Teoremin tam ifadesini buraya ekliyoruz.
 $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ ve $\mathbf{A}$ 'nın negatif olmayan bir matris olduğunu varsayalım. O zaman

$$\min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(\mathbf{A}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

and

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(\mathbf{A}) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

Theorem 1'in ispatı. Nash Dengesinin varlığını görmek için, strateji kümesi $[0, 1]$ 'in her bir birey için dışbükey ve kompakt bir küme olduğunu gözlemleyin. Fayda fonksiyonu u_i $\mathbf{x}$ 'te sürekli. u_i , $\mu = 1$ veya tüm j 'ler için $g_{ij} = 0$ olmadıkça x_i 'de tam içbükeydir.

Maksimum Teorem² sonucu olarak en iyi cevap eşleşmesinin tek değerli üst yarı sürekli eşleşme (bizim örneğimizde sürekli bir fonksiyon) olduğunu görürüz. Nash Dengesinin varlığı için tüm şartların sağlandığını teyit ettiğimiz için dengenin var olduğu sonucuna ulaşabiliriz.

Eğer $\mu \neq 1$ ise, o zaman Nash Dengesi tektir çünkü u_i , x_i 'ye göre kesin içbükeydir. Eğer $\mu = 1$ ise, o zaman bir denge kümesi vardır öyle ki $x_i^* = x^* \in [0, 1]$ ayrıca eğer bir i için, tüm j için $g_{ij} = 0$ doğruysa, o zaman $x_i^* = \theta_i$ olduğu açıktır.

$\mathbf{g}$ ağırlık seçelim ve $\mu < 1$ olsun. Yukarıdaki argümanlardan Nash Dengesinin, $\mathbf{x}^*$, varlığına ve tekliğine sahibiz.

Eğer $\mathbf{x}^*$ strateji uzayının içindeyse, o zaman tüm i için $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0$ sağlanır. Yani

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = \frac{-2}{\tau_i} \left[(1 - \mu)(x_i^* - \theta_i) + \mu \sum_j g_{ij}(x_i^* - x_j^*) \right] = 0$$

Yukarıdaki ifadeyi düzenleyerek şu sonuçlara varabiliriz.

$$[1 - \mu + \mu d_i(\mathbf{g})] x_i^* = (1 - \mu)\theta_i + \mu \sum_j g_{ij}x_j^*$$

ve

$$x_i^* = \frac{(1 - \mu)}{1 - \mu + \mu d_i(\mathbf{g})} \theta_i + \frac{\mu}{1 - \mu + \mu d_i(\mathbf{g})} \sum_j g_{ij}x_j^*$$

Ağırlık matrisi $h_{ij} = \frac{1}{1 - \mu + \mu d_i(\mathbf{g})} g_{ij}$ ve $u_i = \frac{1}{1 - \mu + \mu d_i(\mathbf{g})} \theta_i$ olsun. O zaman yukarıdaki denklemi matris notasyonu ile şu şekilde yeniden yazılabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= (1 - \mu)\mathbf{u} + \mu \mathbf{h} \mathbf{x}^* \\ [\mathbf{I} - \mu \mathbf{h}] \mathbf{x}^* &= (1 - \mu)\mathbf{u} \\ \mathbf{x}^* &= (1 - \mu)(\mathbf{I} - \mu \mathbf{h})^{-1} \mathbf{u} \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadedeki son adım Lemma 20 ve Theorem III* of Debreu ve Herstein

²Bkz. Sundaram (2005)'daki Teorem 9.17

(1953) gereği doğrudur. Sonuç olarak Nash Dengesini şu şekilde ifade edebiliriz.

$$\mathbf{x}^* = (1 - \mu)\mathbf{B}_u(\mathbf{h}, \mu)$$

$\mathbf{x}^*$ strateji uzayın içinde olduğunu teyit etmek için $\underline{\theta} = \min\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ ve $\bar{\theta} = \max\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ olsun. Tüm $k > 0$ için $\mu^k \underline{\theta} \mathbf{1} < \mu^k \mathbf{h}^k \theta < \mu^k \bar{\theta} \mathbf{1}$ doğru olacaktır³.

Dolayısıyla Bonacich-Katz merkeziyet ölçüsü vektörü aşağıdaki gibi sınırlıdır.

$$\frac{1}{1 - \mu} \underline{\theta} \mathbf{1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \underline{\theta} \mathbf{1} < \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{h}^k \theta < \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \bar{\theta} \mathbf{1} = \frac{1}{1 - \mu} \bar{\theta} \mathbf{1}$$

$\mathbf{x}^* = (1 - \mu) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{h}^k \theta$ olduğundan tüm i 'ler için $x_i \in [0, 1]$ olur. Bu, $\mathbf{x}^*$ 'ın strateji uzayının içinde olduğunu teyit eder. ■

M-Matris ve Özellikleri

Sosyalleşme oyunun Nash Dengesi Bonacich-Katz merkeziyet ölçüsü dışında farklı bir şekilde de ifade edilebilir. Bu gösterim literatürde M -matrisler olarak bilinen bir matris yapısını temel alacaktır. Öncelikle M -matrisleri tanımlayacak ve bazı özelliklerini göstereceğiz.

Tanım 21 $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ 'de bir kare matris, bir $\mathbf{P} \geq 0$ ve $s > \rho(\mathbf{P})$ için $\mathbf{A} = s\mathbf{I} - \mathbf{P}$ olarak yazılabiliyorsa ise M -Matris olarak adlandırılır. Eğer $\mathbf{A}$ aynı zamanda simetrik ise Stieltjes matris olarak ta adlandırılır.

Şimdi M -matrislerin⁴ bazı özelliklerini sıralayacağız.

Teorem 22 $\mathbf{M}$ bir M -Matris olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur.

- i $\mathbf{M}$ 'in tersi vardır ve pozitifdir: $\mathbf{N} := \mathbf{M}^{-1}$ vardır ve $\mathbf{M}^{-1} \geq 0$,
- ii Eğer $\mathbf{M}$ simetrik ise $\mathbf{N}$ de simetriktir,
- iii Eğer $\mathbf{M}$ 'in tüm satırları 1'e toplanıyorsa $\mathbf{N}$ 'in de tüm satırları 1'e toplanıyordur.

$$\mathbf{M}\mathbf{1} = \mathbf{1} \implies \mathbf{N}\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

- iv Eğer $\mathbf{M}\mathbf{1} \geq 0$ ise tüm k için $n_{ii} \geq n_{ik}$.

İspat.

³Kesin eşitsizlikler $k = 0$ olduğunda zayıf eşitsizliğe dönüşür

⁴ M -matrislerin özelliklerinin bir özeti için Plemmons (1977)'e bakınız.

i Bkz. Theorem III^* of Debreu ve Herstein (1953).

ii $\mathbf{M}$ simetrik olsun. Yani $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$. Biz $(\mathbf{M}^{-1})^T = \mathbf{M}^{-1}$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I} & \text{Bir önceki adımdan dolayı tersi vardır} \\
 (\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1})^T = \mathbf{I} & \text{İki tarafında tersini alalım} \\
 (\mathbf{M}^{-1})^T\mathbf{M}^T = \mathbf{I} & (AB)^T = B^T A^T \text{ dan dolayı} \\
 (\mathbf{M}^{-1})^T\mathbf{M} = \mathbf{I} & \mathbf{M} \text{ simetrik olduğundan} \\
 (\mathbf{M}^{-1})^T = \mathbf{M}^{-1} & \text{İki tarafı da } \mathbf{M}^{-1} \text{ ile çarpalım}
 \end{array}$$

$$\text{iii } \mathbf{M}\mathbf{1} = \mathbf{1} \implies \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{1} \implies \mathbf{I}\mathbf{1} = \mathbf{N}\mathbf{1} \implies \mathbf{N}\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

iv Bkz. McDonald, Neumann, Schneider, ve Tsatsomeros (1995)'daki Teorem 3.2(i).



Artık alternatif gösterimi açıklayabiliriz. Bir sosyal ağ $\mathbf{g}$ seçelim ve $\mu < 1$ olsun. 2.7 denklemindeki en iyi cevap fonksiyonu

$$[1 - \mu + \mu d_i(\mathbf{g})] x_i^* = (1 - \mu)\theta_i + \mu \sum_j g_{ij} x_j^*$$

matris notasyonu ile şu şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^* = \theta$$

Burada $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \frac{\mu}{1-\mu}(\mathbf{g} - \mathbf{D})$ ve $\mathbf{D} = \mathbf{I} \star \mathbf{d}(\mathbf{g})$ köşegeni derece vektörü olan bir matristir. Nash Dengesi, en iyi cevap fonksiyonlarından oluşan doğrusal denklem sisteminin bir çözümüdür ve Nash Dengesi Bonacich-Katz merkeziet fonksiyonundan farklı bir şekilde de ifade edilebilir.

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{M}^{-1}\theta$$

Aşağıdaki ifadelerin doğru olduğu gözlemlenebilir.

$$M_{ii} = 1 + \frac{\mu}{1-\mu}d_i(\mathbf{g}) \text{ tüm } i \in N \text{ için}$$

$$M_{ij} = -\frac{\mu}{1-\mu}g_{ij} \text{ tüm } i \neq j \text{ için}$$

Yukarıda tanımlanan $\mathbf{M}$ bir M -matristir. Aşağıdaki önerme $\mathbf{M}$ 'in bir M -Matris olduğunu dolayısıyla tersinin var olduğunu ve pozitif olduğunu ispatlayacak.

Önerme 23 *Yukarıda tanımlanan $\mathbf{M}$ matrisi bir M -Matristir.*

İspat. $\mathbf{M}$ 'in bir M -Matris olduğunu göstermek için bir $\mathbf{P} \geq 0$ ve $s > \rho(\mathbf{P})$ için $\mathbf{M} = s\mathbf{I} - \mathbf{P}$ şeklinde yazılabildiğini göstermemiz gerekiyor. $s = 1 + \frac{\mu}{1-\mu}n$ olsun ve $\mathbf{P} \geq 0$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$P_{ii} = \frac{\mu}{1-\mu}(n - d_i(\mathbf{g})) \text{ tüm } i \in N \text{ için}$$

$$P_{ij} = \frac{\mu}{1-\mu}g_{ij} \text{ tüm } i \neq j \text{ için}$$

Sayfa 73'teki dipnotta ifade ettiğimiz Horn ve Johnson (1985)'daki Theorem 8.1.22'e ve $\mathbf{P}$ 'nin tanımına göre

$$\frac{\mu}{1-\mu}n = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n P_{ij} \leq \rho(\mathbf{P}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n P_{ij} = \frac{\mu}{1-\mu}n$$

Yani $1 + \frac{\mu}{1-\mu}n = s > \rho(\mathbf{P}) = \frac{\mu}{1-\mu}n$. Dolayısıyla $\mathbf{M}$ bir M -Matristir ve M -Matrislerin özelliği gereği tersi var ve pozitifdir. ■

O zaman Denge davranışları şu şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{g}) = \mathbf{M}^{-1}\theta = \left[\mathbf{I} - \frac{\mu}{1-\mu}(\mathbf{g} - \mathbf{D}) \right]^{-1} \theta$$

Önerme 2'nin ispatı. $\mu < 1$ ve $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ bir sosyal ağ olsun. $\mathbf{x}^*$ bu sosyal ağda tanımlı ağ oyunun $\Gamma(\mathbf{g})$ Nash Dengesi olsun. O zaman tüm i için

$$(1 - \mu)x_i^* + \mu d_i(\mathbf{g})x_i^* = (1 - \mu)\theta_i + \mu \sum_j g_{ij}x_j$$

Yukarıdaki denklemi yeniden yazıp düzenlersek,

$$(1 - \mu)(x_i^* - \theta_i) = \mu \sum_j g_{ij}(x_j^* - x_i^*)$$

Yukarıdaki denklemi tüm i 'ler için toplarsak

$$(1 - \mu) \sum_i (x_i^* - \theta_i) = \mu \sum_i \sum_{j \neq i} g_{ij}(x_j^* - x_i^*)$$

Yukarıdaki denklemde eşitliğin sağındaki ifadede her bir $ij \in \mathbf{g}$ ilişkisi bu ilişkideki iki birey için ayrı ayrı ele alınıyor. Dolayısıyla da davranışları arasındaki farklar karşılıklı olduğu için bu farkların toplamaları 0'a eşit olacaktır. O zaman

$$\sum_i (x_i^* - \theta_i) = 0$$

olur. ■

Önerme 4'ün ispatı. $\mathbf{g}^\emptyset$ boş ağı ve $\mathbf{g} = \mathbf{g}^\emptyset + ij$ ise sadece i ve j arasında bir ilişki olan sosyal ağı gösterebilir. Genelliği bozmadan $i < j$ olduğunu varsayalım.

Boş ağda, tüm i için $x_i^*(\mathbf{g}^\emptyset) = \theta_i$ ve $U_i(\mathbf{g}^\emptyset) = 1 - \mu$ olur.

$\mathbf{g}$ ağında ise tüm $k \neq i, j$ için $x_k^*(\mathbf{g}) = \theta_k$, i için $x_i^*(\mathbf{g}) = \frac{1}{1+\mu}(\theta_i + \mu\theta_j)$ ve j için $x_j^*(\mathbf{g}) = \frac{1}{1+\mu}(\theta_j + \mu\theta_i)$ olur. Boş ağdan $\mathbf{g}$ ağında geçtiğimizde i ve j 'nin faydasındaki değişiklik $\Delta U = U_i(\mathbf{g}) - U_i(\mathbf{g}^\emptyset) = U_j(\mathbf{g}) - U_j(\mathbf{g}^\emptyset)$ aşağıdaki gibi olur.

$$\Delta U = (1 - \mu) \left[-\frac{1}{\tau} \frac{\mu^2(\theta_j - \theta_i)^2}{(1 + \mu)^2} \right] + \mu \left[1 - \frac{1}{\tau} \frac{(1 - \mu)^2(\theta_j - \theta_i)^2}{(1 + \mu)^2} \right]$$

$\mathbf{g}^\emptyset$ ikili kararlıdır ancak ve ancak $\Delta U < 0$. Yukarıdaki ifadeyi yeniden düzenlersek

$$\Delta U < 0 \iff \tau < \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)^2}(\theta_j - \theta_i)^2$$

τ 'nın üst sınırı $j = i + 1$ olduğunda en düşük seviyesine ulaşır. Öyleyse herhangi bir bireyin tipi kendisine en yakın olan başka bir bireyle ilişki kurması bile bireylerin faydasına olmayacaktır. Bu durumda boş ağda ikili kararlı olması için gereken şart $\tau < \frac{1-\mu}{(1+\mu)^2} \frac{1}{(n-1)^2}$ olur ve bu da önermeyi kanıtlar. ■

Önerme 5'in ispatı. $\mu \in (0, 1)$ olsun.

- i. $\mathbf{g}$ 'nin önermenin ifadesindeki koşulları sağlayan bir ağ olduğunu varsayalım. Mevcut bir bağlantıyı koparmak veya yeni bir bağlantı oluşturmak için hiçbir teşvik olmadığını göstermemiz gerekiyor.

$ij \in \mathbf{g}$ olduğunu varsayalım, o zaman $j = i - 1$ veya $j = i + 1$ olmalıdır. $\tau \geq \frac{1-\mu}{(1+\mu)^2}(\theta_j - \theta_i)^2$ olduğundan, bağlantıyı koparmak hem i hem de j 'nin faydasını azaltacaktır.

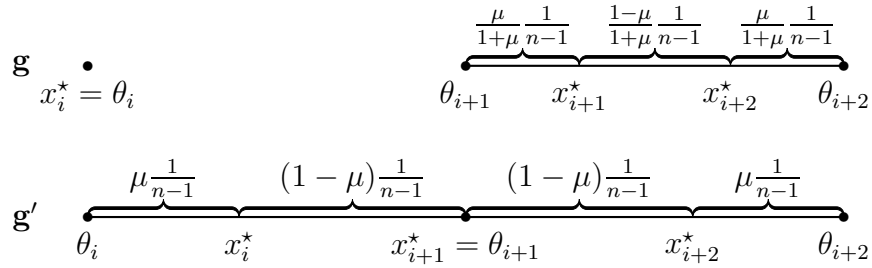
Bir bağlantı eklemek için hiçbir teşvik olmadığını göstermek için iki durumu ele almamız gerekir:

- $d_i(\mathbf{g}) = 0$, veya
- $d_i(\mathbf{g}) = 1$.

İlk durumu ele alalım. O zaman hem $d_{i-1}(\mathbf{g}) = 1$ hem de $d_{i+1}(\mathbf{g}) = 1$ olmalıdır. Genelliği kaybetmeden, $j = i + 1$ olduğunu varsayalım ve $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + ij$ ağını ele alalım. O zaman

$$\begin{array}{lcl} x_i(\mathbf{g}) & = & \theta_i \\ x_{i+1}(\mathbf{g}) & = & \theta_{i+1} + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{1}{n-1} \\ x_{i+2}(\mathbf{g}) & = & \theta_{i+2} - \frac{\mu}{1-\mu} \frac{1}{n-1} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} x_i(\mathbf{g}') & = & \theta_i + \mu \frac{1}{n-1} \\ x_{i+1}(\mathbf{g}') & = & \theta_{i+1} \\ x_{i+2}(\mathbf{g}') & = & \theta_{i+1} - \mu \frac{1}{n-1} \end{array} \right.$$

olacaktır. Yukarıdaki sonuç, bireylerin arasındaki çizginin bir bağlantıyı temsil ettiği aşağıdaki grafikte gösterilmektedir.



Faydadaki değişimler

$$\Delta U_i = U_i(\mathbf{g}') - U_i(\mathbf{g}) = \mu - \frac{1}{\tau} \frac{\mu(1-\mu)}{(n-1)^2}$$

$$\Delta U_{i+1} = U_{i+1}(\mathbf{g}') - U_{i+1}(\mathbf{g}) = \frac{1}{\tau} \frac{\mu(1-\mu)}{(n-1)^2} \left(\frac{1}{(1+\mu)^2} - (1-\mu) \right)$$

olacaktır.

O zaman $\mathbf{g}$ eğer $\Delta U_i < 0$ veya $\Delta U_{i+1} < 0$ ise ikili kararlıdır. Fakat $\Delta U_i < 0$ ancak ve ancak $\tau < \frac{1-\mu}{(n-1)^2}$ ve $\Delta U_{i+1} < 0$ ancak ve ancak $\mu < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0.618$ ise kararlıdır ve bu da önermedeki üst sınırları verir.

Şimdi ikinci durumu ele alalım: $d_i(\mathbf{g}) = 1$. Varsayalım ki $g_{i,i+1} = 1$. Diğer durum yukarıda ele alındığından $d_{i-1}(\mathbf{g}) = 1$ olsun. Gerekli hesaplamalar herhangi bir $\tau \geq 0$ bu durumunda geçerli olduğunu gösterir.

- ii. $\mathbf{g} \in \mathcal{I}_2$ olsun. Mevcut bir bağlantıyı silmek ve yeni bir bağlantı eklemek için hiçbir teşvik olmadığını göstermemiz gerekiyor.

$\tau \geq (1 - \mu) \frac{1}{(n-1)^2}$ olduğundan bir bağlantıyı silmek için hiçbir teşvik yoktur.

Yeni bir bağlantı eklemek için teşvik olup olmadığını kontrol etmek için, bağlayıcı durum i ile $j := i + 1$ arasındaki bağlantıdır, öyle ki $d_i(\mathbf{g}) = 0$, $d_j(\mathbf{g}) = 1$ ve $d_{j+1} = 2$. Yani, i bireyi $\mathbf{g}$ 'de hiçbir bağlantıya sahip değilken j bireyi 3 bitişik bireyin olduğu bir bileşendedir. Hesaplamalar, $\tau < \frac{4(1-\mu)(1-\mu^2)}{(1+2\mu)^2} \frac{1}{(n-1)^2}$ ise ij bağlantısını eklemek için hiçbir teşvik olmadığını göstermektedir.



B Topluluklar Arası Risk Paylaşım Ağları

Lemma 6'nın ispatı. Bir çelişkiye ulaşmak için $\mathbf{g}$ ağının verimli olduğunu ama gereksiz bağlantıya sahip olduğunu varsayalım. Bu gereksiz bağlantının i ve j arasında olduğunu farz edelim. Bu bağlantının silindiği $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - ij$ ağını ele alalım. Herhangi bir $k \in N \setminus \{i, j\}$ için $U_k(\mathbf{g}') = U_k(\mathbf{g})$ olduğunu fark edin. Çünkü ya k bireyi, i ve j bireylerinin ait olduğu bileşeninden farklı bir bileşene aittir ya da k bireyi i ve j ile aynı bileşenedir ancak gereksiz bir bağlantıyı silinmesi ile ait oldukları bileşen değişmez. Bağlantıların maliyetleri de değişmediği için k bireylerinin beklenen net faydası değişmeyecektir. Bu nedenle, W 'daki değişim i ve j 'nin faydalarındaki değişime eşittir. Yukarıda da açıkladığımız gibi gereksiz bağlantının silinmesi bileşenleri değiştirmediğinden i ve j bireylerinin net faydalarındaki değişim sadece maliyetlerden gelecektir. i ve j farklı topluluklardan ise c_H 'ye; aynı topluluktan ise c_L 'ye eşittir. Her durumda, $W(\mathbf{g}') - W(\mathbf{g}) \geq 2c_L > 0$ 'a sahibiz ki bu da $\mathbf{g}$ 'nin verimli olduğu varsayımı ile çelişir. ■

Lemma 7'nin ispatı. $\mathbf{g}$ 'nin verimli bir ağ ve $S \in \mathcal{S}(\mathbf{g})$ 'nin sıradan olmayan bir bileşen olduğunu varsayalım. S yalnızca bir topluluktan bireyler içeriyorsa, bu bileşendeki herhangi bir birey $i \in S$ 'nin faydası en az $\underline{v} - c_L$ olur. Bileşen S 'deki tüm $s - 1$ bağlantısını silmek, beklenen faydayı ($\underline{v}$) değiştirmeden maliyetleri $2(s - 1)c_L$ kadar azalttığı için beklenen net faydayı artırır; bu da $\mathbf{g}$ 'nin verimli olduğu varsayımı ile çelişir.

Verimli bir ağda her sıradan olmayan bileşenin tam olarak bir topluluklar arası bağlantı içerdiğini görmek için, birden fazla topluluklar arası bağlantıya sahip bir $S \subseteq N$ bileşeninin var olduğunu varsayalım. Bu varsayımın bir çelişkiye sebep olmasını bekliyoruz. $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ ve $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ olsun. $\mathbf{g}$ ile S bileşeni dışında aynı olan $\mathbf{g}'$ ağını oluşturalım. $\mathbf{g}'$ 'da S bileşenindeki bağlantıların s_1, s_2 'yle, s_2, s_3 'le v.d. şeklinde bağlantılı olacak şekilde yeniden düzenleyelim.

$$g'_{s_1, s_2} = 1, g'_{s_2, s_3} = 1, \dots, g'_{s_{k-1}, s_k} = 1$$

Lemma 6'ya ve yaptığımız yeniden düzenlemeye göre, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{g}'$ ağlarında S bileşeninde $k - 1$ bağlantı bulunmaktadır. Ancak, S bileşenindeki bağlantıların toplam maliyeti $\mathbf{g}'$ ağında $(k - 2)c_L + c_H$ 'ye eşittir ve bu değer, birden fazla topluluklar arası bağlantı içerdiğini varsaydığımızdan $\mathbf{g}$ ağındaki bağlantıların toplam maliyetinden daha küçük

olacaktır.

$$\sum_{i \in S} C_i(\mathbf{g}') = (k-2)c_L + c_H < (k-3)c_L + 2c_H \leq \sum_{i \in S} C_i(\mathbf{g})$$

Bu durumda ise $W(\mathbf{g}') > W(\mathbf{g})$ olur ki bu da $\mathbf{g}$ ağının verimli olduğu varsayımı ile çelişir.

Lemmanın ikinci kısmını görmek için, $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ olduğunu ve verimli bir ağ $\mathbf{g}'$ 'de iki sıradan bileşen $\{i\}, \{j\} \in \mathbf{S}(\mathbf{g})$ olduğunu varsayalım, öyle ki i ve j farklı topluluklardan olsun. O zaman her $k = \{i, j\}$ için

$$EU_k(\mathbf{g} + ij) = \bar{v} - c_H > \underline{v} = EU_k(\mathbf{g})$$

olur. Yukarıda eşitsizlik varsayımdan dolayı doğrudur. i, j dışındaki tüm bireylerin faydaları hem $\mathbf{g}$ hem de $\mathbf{g} + ij$ ağlarında aynı olduğundan, $W(\mathbf{g} + ij) > W(\mathbf{g})$ olur ki bu da $\mathbf{g}$ 'nin verimli olduğu varsayımı ile çelişir. ■

Önerme 8'in ispatı. $\mathbf{g}$ herhangi bir verimli ağ olsun. $\mathcal{G}$ tüm bu ağların kümesi olsun. Lemma 6 ve Lemma 7'ye göre, $\mathbf{g}$ 'nin tüm sıradan olmayan bileşenleri her iki topluluktan en az bir birey içermeli ve tam olarak bir topluluklar arası bağlantı içermelidir. $\mathbf{g}$ ağı $0 \leq p \leq n$ sıradan olmayan bileşene ve $0 \leq q \leq 2n - 2p$ sıradan bileşene sahiptir ve bileşenlerinin kümesi $\mathcal{S}(\mathbf{g}) = \{S_1, \dots, S_p, \{i_1\}, \dots, \{i_q\}\}$ şeklinde yazılabilir. $\mathbf{g}$ ağındaki bağlantıların toplam maliyetinin $\sum_i C_i(\mathbf{g}) = 2(p c_H + (2n - q - 2p)c_L)$ 'ye eşit olduğuna not edelim.

- i. $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_H + 2(n-1)c_L > n(\bar{v} - \underline{v})$ olduğunu varsayalım. Boş ağın tek verimli ağ olduğunu göstermek için, tüm $\mathbf{g} \in \mathcal{G} \setminus \mathbf{g}^\emptyset$ için $W(\mathbf{g}) < W(\mathbf{g}^\emptyset)$ 'i göstermemiz gerekir. $\mathbf{g} \in \mathcal{G} \setminus \mathbf{g}^\emptyset$ ağı, boş ağ olan $\mathbf{g}^\emptyset$ 'den farklı herhangi bir ağ olsun. $\mathbf{g}$ için $p \geq 1$ olduğunu unutmayın, aksi takdirde $\mathbf{g}$ boş ağdır.

Göstermek istediğimiz $W(\mathbf{g}) < W(\mathbf{g}^\emptyset)$ ifadesi şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} W(\mathbf{g}) < W(\mathbf{g}^\emptyset) &\iff \sum_i EU_i(\mathbf{g}) - 2(p c_H + (2n - q - 2p)c_L) - 2n \underline{v} < 0 \\ &\iff (2n - q)(\bar{v} - \underline{v}) - 2(p c_H + (2n - q - 2p)c_L) < 0 \\ &\iff (2n - q - 2p)(\bar{v} - \underline{v} - 2c_L) + 2p(\bar{v} - \underline{v} - c_H) < 0 \end{aligned}$$

Yukarıda ikinci satır $\sum_i EU_i(\mathbf{g}) \leq (2n - q)\bar{v} + q\underline{v}$ eşitliğinden¹ dolayı doğrudur.

¹ $\mathbf{g}$ ağında sıradan olmayan bileşenlerdeki $p = 2n - q$ birey tam sigortaya eriştiğinden dolayı $\bar{v}$

Eğer $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ve $2c_L \geq \bar{v} - \underline{v}$ ise göstermek istediğimiz eşitsizlik kurulmuştur². Ancak $2c_L < \bar{v} - \underline{v}$ ise aşağıdaki ilk ifade tam pozitif, ikinci ifade ise tam negatiftir.

$$(2n - q - 2p) \underbrace{(\bar{v} - \underline{v} - 2c_L)}_{>0} + 2p \underbrace{(\bar{v} - \underline{v} - c_H)}_{<0}$$

$p = 1$ ve $q = 0$ olarak alındığında yukarıdaki ifade maksimize edilir. O zaman

$$\begin{aligned} (2n - q - 2p)(\bar{v} - \underline{v} - 2c_L) + 2p(\bar{v} - \underline{v} - c_H) &\leq (2n - 2)(\bar{v} - \underline{v} - 2c_L) + 2(\bar{v} - \underline{v} - c_H) \\ &= 2[n(\bar{v} - \underline{v}) - 2(n - 1)c_L - c_H] \\ &< 0 \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlik $c_H + 2(n - 1)c_L > n(\bar{v} - \underline{v})$ varsayımından kaynaklanır. Bu da göstermek istediğimiz eşitsizliği yeniden kurar.

- ii. $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_H < 2c_L$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{M}$ 'in tam eşleşmeler kümesi ve $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ 'nin de tam eşleşme olduğunu varsayalım. $\mathbf{g} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{M}$ 'nin herhangi bir tam eşleşmeden farklı bir ağ olduğunu varsayalım. $\mathbf{g}$ 'nin sıradan bileşenleri hakkında bir gözlemle başlıyoruz: $\mathcal{S}(\mathbf{g}) = \{S_1, \dots, S_p, \{i_1\}, \dots, \{i_q\}\}$. $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ olduğundan Lemma 7 gereği tüm sıradan bileşenlerdeki bireyler aynı topluluktan olmalıdır. Dolayısıyla da $p + q \leq n$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} W(\mathbf{g}) < W(\mathbf{m}) &\iff \sum_i EU_i(\mathbf{g}) - 2(pc_H + (2n - q - 2p)c_L) - (2n\bar{v} - 2nc_H) < 0 \\ &\iff (2n - q)\bar{v} + q\underline{v} - 2n\bar{v} + 2nc_H - 2(pc_H + (2n - q - 2p)c_L) < 0 \\ &\iff q(\underline{v} - \bar{v}) + 2qc_L + 2(n - p)c_H - 2(2n - 2p)c_L < 0 \\ &\iff q(2c_L + \underline{v} - \bar{v}) + 2(n - p)(c_H - 2c_L) < 0 \\ &\iff (n - p)(2c_L + \underline{v} - \bar{v}) + 2(n - p)(c_H - 2c_L) < 0 \\ &\iff (n - p)(c_H - (\bar{v} - \underline{v}) + c_H - 2c_L) < 0 \end{aligned}$$

İkinci satır $\sum_i EU_i(\mathbf{g}) \leq (2n - q)\bar{v} + q\underline{v}$ 'den ve beşinci satır $p + q \leq n$ 'den dolayı doğrudur.

Son satırdaki ifade $c_H < \bar{v} - \underline{v}$ ve $c_H < 2c_L$ varsayımlarına göre tam negatiftir, dolayısıyla herhangi bir tam eşleşmeden farklı olan herhangi bir $\mathbf{g} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{M}$ için $W(\mathbf{m}) > W(\mathbf{g})$ elde ederiz.

beklenen faydaya sahiptir. Geri kalan q sıradan bileşendeki birey ise sigortaya erişemediğinden $\underline{v}$ beklenen faydaya sahiptir

² $p \geq 1$ olduğundan $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ eşitsizliği kesin eşitsizlik olmalı ve eşitliğe yer bırakmamalıdır.

- iii. $2c_L < c_H$ ve $c_H + 2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v})$ olduğunu varsayalım. Yaptığımız varsayımın $2c_L < \bar{v} - \underline{v}$ anlamına geldiği görülebilir. Bunu görmek için iki durumu ele alalım: Eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise, $2c_L < c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ olur ki bu da $2c_L < \bar{v} - \underline{v}$ anlamına gelir. Ancak $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ise,

$$2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v}) - c_H < (n-1)(\bar{v} - \underline{v})$$

Burada ilk eşitsizlik sadece $c_H + 2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v})$ varsayımını yeniden yazılmasıdır ve ikinci eşitsizlik $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ 'den kaynaklanır. Ancak $2(n-1)c_L < (n-1)(\bar{v} - \underline{v})$ eşitsizliği $2c_L < \bar{v} - \underline{v}$ anlamına gelir.

$\mathcal{MP}$ 'nin tüm asgari patika ağlarının kümesi olduğu ve $\mathbf{g}^p \in \mathcal{MP}$ 'nin bir asgari patika ağı olduğunu varsayalım. $\mathbf{g} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{MP}$ 'nin asgari patika ağlarından farklı herhangi bir ağ olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikleri elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} W(\mathbf{g}) &< W(\mathbf{g}^p) \\ \iff \sum_i EU_i(\mathbf{g}) - 2(pc_H - (2n - q - 2p)c_L) - 2n\bar{v} + 2(c_H + (2n - 2)c_L) &< 0 \\ \iff \sum_i EU_i(\mathbf{g}) - 2n\bar{v} + 2(c_H - pc_H + (2n - 2)c_L - (2n - q - 2p)c_L) & \\ \iff q(\underline{v} - \bar{v}) + 2((p - 1)c_H + 2(p - 1)c_L + qc_L) &< 0 \\ \iff q(2c_L - (\bar{v} - \underline{v})) + 2(p - 1)(2c_L - c_H) &< 0 \end{aligned}$$

Üçüncü satır $\sum_i EU_i(\mathbf{g}) \leq (2n - q)\bar{v} + q\underline{v}$ 'den gelir.

Eğer $p \geq 1$ ($q \geq 0$) ise, yukarıdaki son satır kesinlikle negatiftir çünkü $2c_L - (\bar{v} - \underline{v}) < 0$ ve $p - 1 \geq 0$ ve $2c_L - c_H < 0$ değerlerine sahibiz. Eğer $p = 0$ ise³, o zaman son satır şu hale gelir:

$$2(c_H + 2(n-1)c_L - n(\bar{v} - \underline{v}))$$

ki bu da $c_H + 2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v})$ değerini varsaydığımız için tam negatiftir.

Sonuç olarak, eğer $2c_L < c_H$ ve $c_H + 2(n-1)c_L < n(\bar{v} - \underline{v})$ ise, tüm $\mathbf{g} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{MP}$ için $W(\mathbf{g}) < W(\mathbf{g}^p)$ elde ederiz, yani bir ağ ancak ve ancak asgari patika ağı ise verimlidir.

³Bu durumda $q = 2n$ olacağı için $\mathbf{g}$ boş ağ olur.

■ **Lemma 9'un ispatı.** $\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlı bir ağ ve S 'nin de i ile j arasında gereksiz bağlantı olan bir bileşen olduğunu varsayalım. $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - ij$ olduğunu düşünelim. ij arasındaki bağlantı gereksiz olduğundan, onu silmek bileşeni değiştirmez. Dolayısıyla

$$U_i(\mathbf{g}') = \begin{cases} U_i(\mathbf{g}) - c_L, & \text{eğer } i \text{ ve } j \text{ aynı topluluktan ise} \\ U_i(\mathbf{g}) - c_H, & \text{eğer } i \text{ ve } j \text{ farklı topluluklardan ise} \end{cases}$$

olur. Benzeri bir durum j bireyi içinde geçerlidir. Fakat, $U_i(\mathbf{g}') = U_i(\mathbf{g} - ij) > U_i(\mathbf{g})$ olur ki bu da $\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlı olduğu gerçeğiyle çelişir. ■

Lemma 10'un ispatı. $\mathbf{g}$ dengesiz bir S bileşeni içeren ikili kararlı bir ağ olsun. S yalnızca bir topluluktan bireyler içeriyorsa, $S \cap N^A = \emptyset$ veya $S \cap N^B = \emptyset$ ise, o zaman bileşendeki herhangi bir bireyin $i \in S$ faydası $U_i(\mathbf{g}) = \underline{v} - d_i(\mathbf{g})c_L$ 'ye eşittir. $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - ij$ olsun. Bu yeni ağda i bireyinin faydası

$$U_i(\mathbf{g}') = \underline{v} - d_i(\mathbf{g}')c_L = \underline{v} - (d_i(\mathbf{g}) - 1)c_L = U_i(\mathbf{g}) - c_L > U_i(\mathbf{g})$$

olur ki $c_L > 0$ olduğu için bireyin faydası artmış olur. Fakat bu $\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlı olduğu varsayımı ile çelişir.

S her iki topluluktan da bireyler içeriyorsa, $s^A > s^B$ olduğunu varsayalım. Lemma 9'a göre, derecesi 1 olan en az iki birey vardır. $L = \{i \in S : d_i(\mathbf{g}) = 1\}$ bu tür bireylerin kümesi olsun⁴. Dikkate alınması gereken iki durum vardır: (i) A topluluğundan olan en az bir $i \in L \cap N^A$ vardır veya (ii) L 'deki tüm bireyler B topluluğundandır: $L \cap N^B = L$.

Birinci durum (i) için, $i \in L \cap N^A$ ve $j \in S$ bireyi i 'nin tek bağlantısı olsun ve $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - ij$ olarak belirleyelim. O zaman,

$$\frac{|s_j^A(\mathbf{g}') - s_j^B(\mathbf{g}')|}{s_j^A(\mathbf{g}') + s_j^B(\mathbf{g}')} < \frac{|s_j^A(\mathbf{g}) - s_j^B(\mathbf{g})|}{s_j^A(\mathbf{g}) + s_j^B(\mathbf{g})}$$

olduğundan, $EU_j(\mathbf{g}') > EU_j(\mathbf{g})$ olur. Ayrıca j 'nin artık bir bağlantısı eksik olduğundan bağlantı maliyetleri $C_j(\mathbf{g}') < C_j(\mathbf{g})$ olur. Bu nedenle, $U_j(\mathbf{g}') > U_j(\mathbf{g})$ elde ederiz ki bu da $\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlı olduğu varsayımıyla çelişir.

(ii) durumunda ise şöyle bir önermede bulunuyoruz: S bileşeninde öyle bir ij bağlantısı bulunabilir ki; bu bağlantının kaldırılması bileşeni iki bileşene böler ve bunlardan biri dengeli bileşen olur ve ij bağlantısında yer alan bireylerden biri yeni

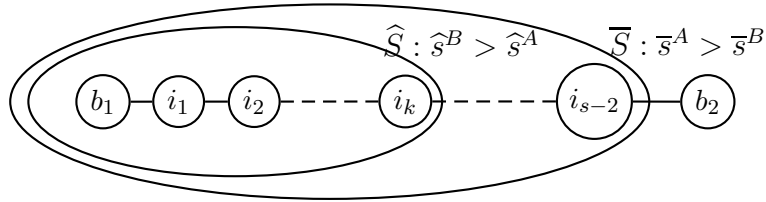
⁴Bu bireylere, ağaç şeması gösteriminden esinlenerek ağacın uç noktalarına benzediği için yaprak denir

dengeli bileşene ait olur. Eğer bu önermenin doğru olduğu gösterilirse, dengeli bileşene ait olan birey, diyelim ki i için, $EU_i(\mathbf{g}') = \bar{v} > EU_i(\mathbf{g})$ olduğundan daha yüksek bir faydaya sahip olur. Dahası, $C_i(\mathbf{g}') - C_i(\mathbf{g}) \geq c_L$ 'dir. Bu nedenle, i bireyinin faydası $\mathbf{g}'$ altında kesinlikle daha yüksektir; bu da $\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlı olduğu ile çelişir.

Şimdi, yukarıdaki önermemizin doğru olduğunu göstereceğiz. Her asgari bağlı bileşen bir ağaç şeması gösterimine sahip olduğundan, herhangi iki birey arasında tek bir patika vardır. Önermemizi $|L| = 2$ minimum boyutuyla başlayarak gösteriyoruz. $b_1, b_2 \in N^B$ olmak üzere $L = \{b_1, b_2\}$ olsun. b_1 ve b_2 arasındaki tek olan patika $\{b_1, i_1, \dots, i_{s-2}, b_2\}$ ile gösterilsin. Bileşeni tek bir dengeli bileşene bölen ij bağlantısını bulmak için şu prosedürü takip edebiliriz: b_1 'den başlayın. Patikadaki bağlantıları takip edin ve her bağlantı için, bu bağlantı kaldırılırsa ortaya çıkan bileşenleri düşünün ve bu bileşenlerden b_1 'in ait olduğu yeni $\hat{S}$ bileşenindeki A ve B topluluklarından birey sayılarını, $\hat{s}^A$ ve $\hat{s}^B$, sayılarını takip edin. ij bağlantısı bulunana kadar devam edin. Prosedürün bir adımında ij bağlantısının bulunması gerektiğini göstereceğiz. Örneğin, b_1 'den başlayın ve ilk bağlantı $b_1 i_1$ bağlantısını düşünün. Bunu kaldırmak S 'yi iki bileşene böler: $\{b_1\}$, $\{i_1, \dots, i_{s-2}, b_2\}$. b_1 bireyinin ait olduğu $\hat{S} = \{b_1\}$ bileşeni için $\hat{s}^A = 0$ ve $\hat{s}^B = 1$ olur. Eğer diğer bileşen dengeli değilse bir sonraki adıma geçeriz. Bir sonraki bağlantı $i_1 i_2$ için, eğer $i_1 \in N^A$ ise, o zaman $\hat{s}^A = 1$ ve $\hat{s}^B = 1$ olur ki dengeli bir bileşene ulaşmış oluruz. Aksi takdirde $\hat{s}^B > \hat{s}^A$ olur ve bir sonraki bağlantıya geçeriz. Bu prosedürle ilgili kritik gözlem şudur ki, yukarıdaki prosedür bir k adımına kadar ij bağlantısını bulamazsa, o zaman bağlantı silindikten sonra b_1 içeren $\hat{S}$ bileşeni için $\hat{s}^B > \hat{s}^A$ olacaktır. Şekil 12'ye bakınız.

Şekil 12

Dengesiz Bir Bileşeni Biri Dengeli Olmak Üzere İki Bileşene Bölen Bağlantıyı Gösteren Prosedür

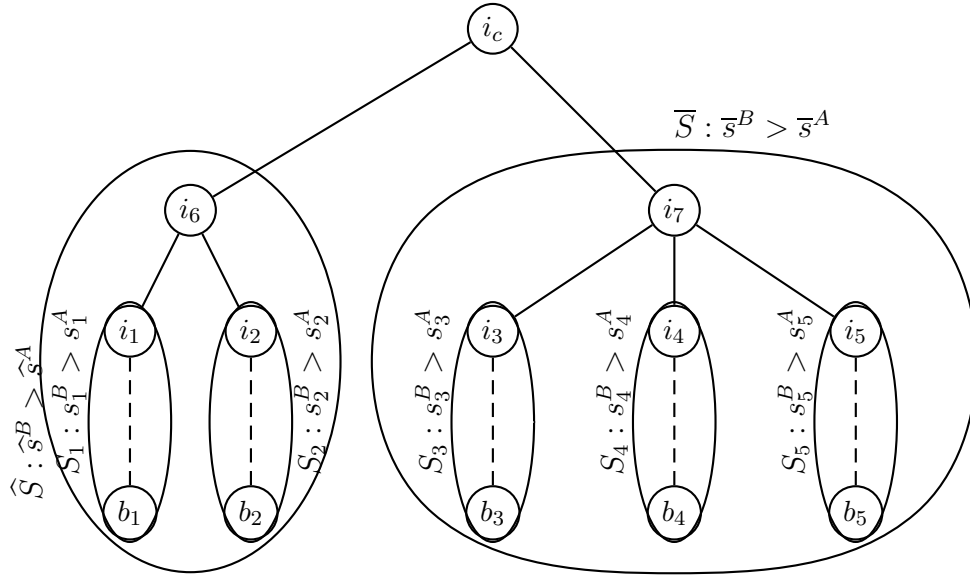


Fakat prosedürün başarısız olduğu k adımı $s - 2$ adımına kadar devam edemez zira bu durumda $\bar{s}^B > \bar{s}^A$ olması gerekir ki bu da en baştaki varsayımımız $s^A > s^B$ ve $b \in B$ varsayımları gereği olan $\bar{s}^A > \bar{s}^B$ ile çelişir.

$|L| > 2$ durumunda da benzer bir argüman geçerlidir. Kök i_c 'nin birden fazla bağlantısı olan bireylerden biri olduğu bir ağaç gösterimini ele alalım. Örneğin Şekil 13'de $L = \{b_1, b_2, \dots, b_5\}$ 'dir. Prosedüre terminal düğümlerinden (bir bağlantısı olan bireyler) başlar ve i_c köküne giden patikayı takip eder. Örneğin, prosedür b_1 ile başlar. i_1 bireyine ulaştığında ij bağlantısını bulamazsa, bir sonraki b_2 bireyini düşünürüz. i_2 'ye ulaştığında da prosedürün başarısız olduğunu varsayalım. Sonraki adımda iki bileşen S_1, S_2 ve i_6 'yı $\hat{s}^B > \hat{s}^A$ olan $\hat{S}$ bileşenine birleştiririz. Bu prosedür sonunda kök i_r 'ye ulaşacağından ve önceki adımlardaki tüm bileşenlerini S bileşenine birleştireceğinden, ij bağlantısını bulamamak $\bar{s}^B > \bar{s}^A$ anlamına gelir ki bu da $\bar{s}^A > \bar{s}^B$ varsayımıyla çelişir.

Şekil 13

Asgari Bağlı Bileşenlerin Ağaç Şeması Gösterimde Dengesiz Bileşeni Biri Dengeli Bileşenlere Bölmek



Dolayısıyla önerdiğimiz prosedür her L değeri için çalışmaktadır ve sıradan olmayan dengesiz bir bileşen her zaman iki bileşene bölünebilir ki bu bileşenlerden biri dengeli olacaktır. Bu da ispatta kullandığımız önermemizi kanıtlar ve dolayısıyla Lemma 10'daki ifadeyi de kanıtlar. ■

Lemma 11'in ispatı. g sıradan bileşenlere sahip ikili kararlı bir ağ olsun. $S_1, \dots, S_k$ sıradan olmayan bileşenler ve $\{i_1\}, \dots, \{i_m\}$ sıradan bileşenler olmak üzere $\mathcal{S}(g) = \{S_1, \dots, S_k, \{i_1\}, \dots, \{i_m\}\}$ bileşenler kümesi olsun.

Lemma 10'a göre, sırada olmayan tüm bileşenler dengelidir. Dolayısıyla, tüm $i = \{1, \dots, k\}$ için $s_i^A = s_i^B$ olmalıdır. Bu da, m 'nin çift sayısı olduğu ve bir topluluktan $\frac{m}{2}$ sıradan bileşen ve diğer topluluktan $\frac{m}{2}$ sıradan bileşen olduğu anlamına gelir.

$i_s \in N^A$ ve $i_t \in N^B$ herhangi iki bileşen bileşen ve $\mathbf{g}' = g + i_s i_t$ olsun. Eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise, tüm $k = \{i_s, i_t\}$ için

$$U_k(\mathbf{g}') - U_k(\mathbf{g}) = \bar{v} - c_H - \underline{v} \geq 0$$

elde ederiz ki bu da $\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlı olduğu varsayımı ile çelişir. ■

Önerme 12'nin ispatı.

- i. $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ olduğunu varsayalım. Boş ağın ikili kararlı olduğu açıktır çünkü topluluk arası bir bağlantı eklemenin maliyeti beklenen faydadaki kazançtan daha fazladır.

Boş ağın tek ikili kararlı ağ olduğunu görmek için, $\mathbf{g}$ 'nin boş ağdan farklı ikili kararlı bir ağ olduğunu varsayalım. Bu ağdaki $S \in \mathcal{S}(\mathbf{g})$ sıradan olmayan bir bileşen olsun. Lemma 10'a göre, S dengeli ve indirgenemez bir bileşendir ve tüm $k \in S$ için $EU_k(\mathbf{g}) = \bar{v}$ 'dir. S bileşeninde en az bir topluluklar arası bağlantı vardır. Diyelim ki bu bağlantı i ve j arasında olsun. O zaman tüm $k = \{i, j\}$ için

$$\begin{aligned} U_k(\mathbf{g}') - U_k(\mathbf{g}) &= EU_k(\mathbf{g}') - EU_k(\mathbf{g}) + c_H \\ &\geq c_H + \underline{v} - \bar{v} \\ &> 0 \end{aligned}$$

olur ki bu $\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlı ağ olma varsayımı ile çelişir.

- ii. Tüm tam eşleşmelerin ikili kararlı olduğunu göstererek başlıyoruz. Varsayalım ki $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ve $\mathbf{m}$ herhangi bir tam eşleşme olsun. Tam eşleşmelerin ikili kararlılığını göstermek için, mevcut bir bağlantıyı silmek veya yeni bir bağlantı eklemek için hiçbir teşvik olmadığını doğrulamamız gerekir.

$ij \in \mathbf{m}$ 'nin tam eşleşme $\mathbf{m}$ 'deki herhangi bir bağlantı olduğunu varsayalım. Tam eşleşmenin tanımı gereği, bu ij bağlantısı topluluklar arası bağlantıdır ve $\{i, j\} \in \mathcal{S}(\mathbf{m})$ 'dir. Bu nedenle, tüm $k \in \{i, j\}$ için

$$U_k(\mathbf{m}) = \bar{v} - c_H \geq U_k(\mathbf{m} - ij) = \underline{v}$$

olur. Bu da bize herhangi bir tam eşleşme $\mathbf{m}$ 'deki topluluklar arası bağlantıları silmenin bireylerin faydasına olmadığını gösterir.

$ij \notin \mathbf{m}$ bağlantısının $\mathbf{m}$ tam eşleşmesinde olmayan herhangi bir bağlantı olduğunu

varsayalım. Tam eşleşmenin tanımı gereği, ij bağlantısı topluluk içi bağlantı olmalıdır ve farklı topluluklardan olan bazı $n \neq m$ için $\{i, m\}, \{j, n\} \in \mathcal{S}(\mathbf{m})$ olmalıdır. Bu nedenle tüm $k \in \{i, j\}$ için

$$U_k(\mathbf{m}) = \bar{v} - c_H \geq U_k(\mathbf{m} + ij) = \bar{v} - c_H - c_L$$

olur. Bu da bize herhangi bir tam eşleşme $\mathbf{m}$ 'de olmayan bir bağlantıyı eklemenin bireylerin faydasına olmadığını gösterir. Yukarıdaki argümanlar bize tüm tam eşleşmelerin ikili kararlı olduğunu ispatlar.

Her ne kadar $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise tam eşleşmeler ikili kararlı iken bu koşul altında tüm ikili kararlı ağlar tam eşleşme değildir. Şimdi önermenin ikinci ifadesini göstereceğiz. $\mathbf{g}$, tüm bileşenlerinin $S \in \mathcal{S}(\mathbf{g})$ 'nin asgari bağlı, dengeli (dolayısıyla sıradan olmayan) ve indirgenemez olduğu bir ağ olsun. Bu ağda tüm bireyler tam sigortaya erişir ve en yüksek beklenen faydaya ulaşır: tüm $i \in N$ için $EU_i(\mathbf{g}) = \bar{v}$. $\mathbf{g}$ 'nin bileşen kümesini $\mathcal{S}(\mathbf{g}) = \{S_1, \dots, S_K\}$ ile gösterelim öyle ki $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_K$ ve $s^* = \frac{1}{2}s_1$ olsun. Bu tür ağların ikili kararlı olduğunu göstermek için benzer bir şekilde mevcut bir bağlantıyı silmek veya yeni bir bağlantı eklemek için hiçbir teşvik olmadığını doğrulamamız gerekir.

Bağlantı eklemek için hiçbir teşvik olmadığını görmek kolaydır. $i, j \in N$, $g_{ij} = 0$ olacak şekilde iki birey olsun. i ve j bireylerinin $\mathbf{g} + ij$ ağındaki beklenen faydaları, ister i ve j aynı bileşene ait olsun (her iki birey de yeni ağ $\mathbf{g} + ij$ 'de aynı dengeli bileşende kalır) ister farklı bileşenlere ait olsun (her iki birey de artık $\mathbf{g} + ij$ 'deki dengeli yeni bir bileşene ait olur ki; bu, i ve j 'nin $\mathbf{g}$ 'de ait olduğu iki dengeli bileşenin birleşimidir) $\bar{v}$ 'a eşit olmaya devam edecektir. Ancak her iki bireyin faydaları, sırasıyla aynı topluluktan veya farklı topluluklardan olmalarına bağlı olarak c_L veya c_H kadar azalır. Yani, $k = \{i, j\}$ için $U_k(\mathbf{g} + ij) < U_k(\mathbf{g})$ olur, bu da her hangi iki bireyin aralarında yeni bir bağlantı eklemenin faydalarına olmadığı anlamına gelir.

$\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlılığını göstermek için, $\mathbf{g}$ 'de var olan bir bağlantıyı silmek için bir teşvik olmadığını da göstermemiz gerekir. $ij \in \mathbf{g}$ 'nin $\mathbf{g}$ ağındaki herhangi bir bağlantı olduğunu varsayalım. $\mathbf{g}$ 'deki tüm bileşenler asgari bağlı ve indirgenemez olduğundan, ij bağlantısını silmek, $S \in \mathcal{S}(\mathbf{g})$ bileşenini iki dengesiz bileşene bölecektir öyle ki; bunun bireylerin net faydasında zıt etkilere sebep olur. Bireyler artık dengesiz bileşenlerde bulunacağı için her iki bireyin de beklenen faydalarını azaltır ancak her iki bireyin de bağlantılarını sürdürmenin

maliyetini azaltarak net faydada artış yönünde bir etki yapar. Bağlantıyı silmek için en yüksek teşvike sahip olan bireyi (maliyette en yüksek kazanç, beklenen faydada en düşük kayıp) belirliyoruz ve bu bireyin bile bağlantıyı silmek için teşviki olmadığını gösteriyoruz. $S \in \mathcal{S}(\mathbf{g})$ 'nin, her iki i ve j bireyinin de $\mathbf{g}$ 'de ait olduğu bileşen olduğunu varsayalım. S dengeli olduğundan $s^A = s^B$ olduğunu fark edin. $S_i(\mathbf{g} - ij) \in \mathcal{S}(\mathbf{g} - ij)$ ve $S_j(\mathbf{g} - ij) \in \mathcal{S}(\mathbf{g} - ij)$ sırasıyla i ve j 'nin $\mathbf{g} - ij$ ağında yer aldığı dengesiz bileşenler olsun. Bireyin beklenen faydalarında değişim

$$\begin{aligned}\Delta EU_i &= EU_i(\mathbf{g}) - EU_i(\mathbf{g} - ij) = \bar{v} - EU(s_i^A(\mathbf{g} - ij), s_i^B(\mathbf{g} - ij)) \\ \Delta EU_j &= EU_j(\mathbf{g}) - EU_j(\mathbf{g} - ij) = \bar{v} - EU(s_j^A(\mathbf{g} - ij), s_j^B(\mathbf{g} - ij))\end{aligned}$$

olur. Ağ $\mathbf{g} - ij$ 'deki i ve j bireylerin beklenen faydalarının sırasıyla $\frac{|s_i^A(\mathbf{g} - ij) - s_i^B(\mathbf{g} - ij)|}{s_i^A(\mathbf{g} - ij) + s_i^B(\mathbf{g} - ij)}$ ve $\frac{|s_j^A(\mathbf{g} - ij) - s_j^B(\mathbf{g} - ij)|}{s_j^A(\mathbf{g} - ij) + s_j^B(\mathbf{g} - ij)}$ oranlarıyla negatif ilişkili olduğunu hatırlayalım. Yeni ağdaki bileşen büyüklükleri ile ilgili olarak

$$s_i^A(\mathbf{g} - ij) + s_j^A(\mathbf{g} - ij) = s^A = s^B = s_i^B(\mathbf{g} - ij) + s_j^B(\mathbf{g} - ij)$$

doğrudur ve bu, bileşenler indirgenemez olduğu için şu anlama gelir.

$$|s_i^A(\mathbf{g} - ij) - s_i^B(\mathbf{g} - ij)| = |s_j^A(\mathbf{g} - ij) - s_j^B(\mathbf{g} - ij)| \neq 0$$

Bir bağlantıyı silmek için en yüksek teşvike sahip olan bireyleri belirlemek için, $\mathbf{g} - ij$ ağında en yüksek beklenen faydaya sahip olan diğer bir ifadeyle $\mathbf{g} - ij$ ağında ait olduğu yeni bileşeninde en düşük orana sahip olan bireyleri bulmamız gerekir. En düşük oran, pay 1'e eşit olduğunda ve payda mümkün olan en yüksek değer olan $s - 1$ olduğunda elde edilir. $\mathbf{g}$ 'nin farklı bileşenlerindeki tüm bireyler arasında, büyüklüğü en yüksek büyüklük olan s^* 'a eşit olan bileşen, orandaki en yüksek paydaya da sahiptir. Bu nedenle, beklenen faydadaki en yüksek kazanç $\bar{v} - EU(s^* - 1, s^*)$ 'a eşittir ve en yüksek kazancı olan bireyin i^* olduğunu varsayalım. Bağlantıyı silmenin en büyük kazancı, topluluklar arası bağlantı olduğunda elde edilir. O zaman bir bağlantıyı silmenin en yüksek net fayda değişimi

$$U_{i^*}(\mathbf{g} - ij) - U_{i^*}(\mathbf{g}) = \bar{v} - EU(s^* - 1, s^*) + c_H$$

olacaktır ki bu değişim eğer $c_H \leq \bar{v} - EU(s^* - 1, s^*)$ ise 0'dan büyük veya ona eşittir. Bu da bileşenleri sıradan olmayan, dengeli ve indirgenemez olan ağların

ikili kararlı olması için gereken koşulu bize verir.

- iii. Son olarak, asgari patika ağı için, yalnızca bir topluluklar arası bağlantı olduğundan ve onu silmek tek bileşeni yalnızca bir topluluktan bireyler içeren iki bileşene bölecektir. Bu, tüm bireylerin beklenen faydalarını $\bar{v}$ 'den $\underline{v}$ 'a değiştirir ve $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ olduğundan, topluluklar arası bağlantıda yer alan iki aracının bağlantıyı silmek için hiçbir teşviki yoktur. Hiçbir iki bireyin topluluk içi bağlantısını silmek için teşviki olmadığını göstermek için $c_L < \bar{v} - EU(n-1, n)$ 'e ihtiyacımız var çünkü bir bağlantıyı silmek için en yüksek teşvike sahip olan birey, bir arkadaşı olan bireylere bağlı olan bireylerdir.



Önerme 13'ün ispatı. $\{\mathbf{g}^t\}_{t=0}^\infty$ 'nin Bölüm 3.4'te açıklanan dinamik sürecin ağlarının dizisi olduğunu varsayalım. $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ eşleşmelerin kümesi olsun: bir topluluktan her bir bireyin ya farklı bir topluluktan olan sadece bir bağlantısının olduğu ya da hiç bağlantısının olmadığı ağlar. Alternatif olarak, bir eşleşme, tüm bileşenlerinin ya bir birey (yani sıradan bileşen) ya da farklı topluluklardan olan tam olarak iki birey içeren ağlardır. Yani, $\mathcal{M} = \{\mathbf{g} \in \mathcal{G} : |S| \leq 2 \text{ tüm } S \in \mathcal{S}(\mathbf{g}) \text{ ve } |S| = 2 \text{ ise bir } i \in N^A \text{ ve } j \in N^B \text{ için } S = \{i, j\}\}$. Tam eşleşmenin, arkadaşı olmayan hiçbir bireyin olmadığı eşleşme olduğunu unutmayın.

Önermenin ilk kısmı için, $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ olduğunu varsayalım. Dinamik sürecin her turundaki ağların eşleşme kümesine ait olduğunu iddia ediyoruz: tüm t için $\mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$. İddiamızı t üzerinde tümevarımla gösteriyoruz. $t = 0$ için, tümevarımın temel durumunu oluşturan $\mathbf{g}^0 = \mathbf{g}^\emptyset \in \mathcal{M}$ 'ye sahibiz.

Tümevarım adımı için, $t \geq 0$ için $\mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$ olduğunu varsayalım. $\mathbf{g}^{t+1} \in \mathcal{M}$ olduğunu göstermek istiyoruz. ij 'nin t adımında rastgele seçilen bağlantı olduğunu varsayalım. İki durum vardır: (1) ij topluluk içi bağlantıdır veya (2) ij topluluklar arası bağlantıdır.

Durum 1'i ele alalım ve $i, j \in N^A$ olduğunu varsayalım. $\mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$ olduğundan, ij bağlantısı $\mathbf{g}^t$ 'de mevcut değildir, dolayısıyla sadece i ve j bireylerinin bağlantıyı eklemek için teşvikleri olup olmadığını kontrol etmemiz gerekir. i ve j 'nin arkadaş sayısı ile ilgili olarak dikkate almamız gereken üç durum vardır: (i) $d_i(\mathbf{g}^t) = d_j(\mathbf{g}^t) = 0$, (ii) $d_i(\mathbf{g}^t) = d_j(\mathbf{g}^t) = 1$ ve (iii) $d_i(\mathbf{g}^t) \neq d_j(\mathbf{g}^t)$.

(i) durumunda $k \in \{i, j\}$ için

$$U_k(\mathbf{g}^t) = \underline{v} > U_k(\mathbf{g}^t + ij) = \underline{v} - c_L$$

Bu nedenle, hem i hem de j bireyleri ij 'ye bağlantı eklemek için teşvike sahip değildir,

dolayısıyla $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$.

(ii) durumunda $k \in \{i, j\}$ için,

$$U_k(\mathbf{g}^t) = \bar{v} - c_H > U_k(\mathbf{g}^t + ij) = \bar{v} - c_H - c_L$$

Bu nedenle, ne birey i ne de birey j 'nin ij bağlantısını ekleme teşviki vardır, dolayısıyla $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$.

(iii) durumu için, $\mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$ varsayımının tüm i bireyleri için $d_i(\mathbf{g}^t) \leq 2$ anlamına geldiğini fark edin. Genelliği kaybetmeden, $d_i(\mathbf{g}^t) = 1, d_j(\mathbf{g}^t) = 0$ varsayıyoruz. O zaman

$$EU_i(\mathbf{g}^t) = \bar{v} > EU_i(\mathbf{g}^t + ij) = EU(2, 1) \text{ ve } C_i(\mathbf{g}^t) = c_H < C_i(\mathbf{g}^t + ij) = c_H + c_L$$

$$EU_j(\mathbf{g}^t) = \underline{v} < EU_j(\mathbf{g}^t + ij) = EU(2, 1) \text{ ve } C_i(\mathbf{g}^t) = 0 < C_i(\mathbf{g}^t + ij) = c_L$$

Her ne kadar, $c_L \leq EU(2, 1) - \underline{v}$ olması durumunda, j bireyi ij bağlantısını eklemek için teşvike sahip olsa da, i bireyinin bağlantıyı eklemesi faydasını azaltır, çünkü yukarıdaki ilk satır $U_i(\mathbf{g}^t) > U_k(\mathbf{g}^t + ij)$ anlamına gelir. Bu nedenle $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$.

Durum 2'yi ele alalım ve genelliği kaybetmeden $i \in N^A$ ve $j \in N^B$ olduğunu varsayalım. İki durum vardır (i) topluluklar arası bağlantı ij zaten $\mathbf{g}^t$ ağındadır: $ij \in \mathbf{g}^t$ veya (ii) ij bağlantısı $\mathbf{g}^t$ ağında değildir: $ij \notin \mathbf{g}^t$.

(i) durumunda tüm $k \in \{i, j\}$ için

$$U_k(\mathbf{g}^t) = \bar{v} - c_H \geq U_k(\mathbf{g}^t - ij) = \underline{v}$$

olur bu da $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ varsayımından çıkar. Bu nedenle $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$.

(ii) durumunda, i ve j 'nin arkadaş sayısı ile ilgili olarak dikkate almamız gereken üç durum vardır: (a) $d_i(\mathbf{g}^t) = d_j(\mathbf{g}^t) = 0$, (b) $d_i(\mathbf{g}^t) = d_j(\mathbf{g}^t) = 1$ ve (c) $d_i(\mathbf{g}^t) \neq d_j(\mathbf{g}^t)$.

(a) durumunda tüm $k \in \{i, j\}$ için

$$U_k(\mathbf{g}^t) = \underline{v} \leq U_k(\mathbf{g}^t + ij) = \bar{v} - c_H$$

Bu nedenle, hem i hem de j bireyleri ij 'ye bağlantı eklemek için teşvike sahiptir. Bu nedenle $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t + ij \in \mathcal{M}$.

(b) durumunda tüm $k \in \{i, j\}$ için,

$$U_k(\mathbf{g}^t) = \bar{v} - c_H > U_k(\mathbf{g}^t + ij) = \bar{v} - 2c_H$$

yani ij bağlantısını eklemek, beklenen faydayı değiştirmeden maliyeti artırır. Bu nedenle, ne i ne de j bireyi, ij bağlantısını eklemek için teşvike sahip değildir. Bu nedenle $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$.

(c) durumu için, $\mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$ varsayımının tüm i bireyleri için $d_i(\mathbf{g}^t) \leq 2$ anlamına geldiğini fark edin. Genelliği kaybetmeden, $d_i(\mathbf{g}^t) = 1, d_j(\mathbf{g}^t) = 0$ varsayıyoruz. O zaman

$$\begin{aligned} EU_i(\mathbf{g}^t) &= \bar{v} > EU_i(\mathbf{g}^t + ij) = EU(1, 2) \text{ and } C_i(\mathbf{g}^t) = c_H < C_i(\mathbf{g}^t + ij) = 2c_H \\ EU_j(\mathbf{g}^t) &= \underline{v} < EU_j(\mathbf{g}^t + ij) = EU(2, 1) \text{ and } C_j(\mathbf{g}^t) = 0 < C_j(\mathbf{g}^t + ij) = c_H \end{aligned}$$

Her ne kadar, $c_H \leq EU(2, 1) - \bar{v}$ olması durumunda j bireyi ij bağlantısını eklemek için teşvike sahip olsa da, i bireyinin bağlantıyı eklemek için teşviki yoktur çünkü yukarıdaki ilk satır $U_i(\mathbf{g}^t) > U_i(\mathbf{g}^t + ij)$ anlamına gelir. Bu nedenle $\mathbf{g}^{t+1} = \mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$.

Yukarıda ele aldığımız durumlar tümevarım adımını oluşturur: eğer $t \geq 0$ için $\mathbf{g}^t \in \mathcal{M}$ ise, o zaman $\mathbf{g}^{t+1} \in \mathcal{M}$ olur. Önermenin ilk bölümün kanıtını bitirmek için göstermemiz gereken tek şey, sürecin sonunda tam bir eşleşmeye ulaştığını göstermektir.

Okuyucu, yalnızca 2.ii.a durumunda topluluklar arası bir bağlantı $ij \notin \mathbf{g}^t$ rastgele seçildiğinde sürecin adımlarında ağın değiştiğini ($\mathbf{g}^t \neq \mathbf{g}^{t+1}$) olduğunu fark etmelidir. Herhangi bir bağlantıyı seçme olasılığı pozitif olduğundan ve sonlu bir ağdaki bağlantı sayısı da sonlu olduğundan, süreç bir sonlu T adımında tam eşleşmeye ulaşacaktır. Son olarak, Önerme 12'a göre, tüm tam eşleşmeler $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ olduğunda ikili kararlıdır; bu da tüm $t \geq T$ için $\mathbf{g}^t = \mathbf{g}^T$ anlamına gelir.

Önermedeki ikinci ifadenin ispatı için, $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ olduğunu varsayalım. İfadeyi, bağlantının türünden (topluluk içi veya topluluklar arası olmasında) bağımsız olarak, rastgele seçilen bağlantıyı boş ağa eklemek için hiçbir teşvik olmadığını göstererek kanıtlıyoruz. Rastgele seçilen bağlantı ij aynı topluluk bağlantısıysa, o zaman tüm $k \in \{i, j\}$ için

$$U_k(\mathbf{g}^0) = \underline{v} < U_k(\mathbf{g}^0 + ij) = \underline{v} - c_L$$

olur ve rastgele seçilen bağlantı ij topluluklar arası bağlantıysa, o zaman tüm $k \in \{i, j\}$ için

$$U_k(\mathbf{g}^0) = \underline{v} < U_k(\mathbf{g}^0 + ij) = \bar{v} - c_H$$

olur burada son eşitsizlik $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ varsayımından kaynaklanır. Her iki durumda da, bireyler boş ağda kesinlikle daha yüksek faydalara sahiptir. Bu nedenle, süreç 0 adımında durur. ■

Lemma 17'nin ispatı. Lemma'nın ilk kısmı için, topluluklar farklı sayıda birey

içerseler de Lemma 9 ve Lemma 10'ın kanıtlarındaki tüm argümanlar geçerlidir.

Lemmanın ikinci kısmı için, $\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlı ve $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ olduğunu varsayalım. $\mathbf{g}$ 'nin bileşen kümesinin $\mathcal{S}(\mathbf{g}) = \{S_1, \dots, S_p, \{i_1\}, \dots, \{i_q\}\}$ olduğunu ve p tane sıradan olmayan bileşen $S_1, \dots, S_p$ ve q tane sıradan bileşen $\{i_1\}, \dots, \{i_q\}$ olduğunu varsayalım. Tüm sıradan olmayan bileşenler Lemma'nın ilk kısmında dolayı dengeli olduğundan, $s_1^A = s_1^B, \dots, s_p^A = s_p^B$ sonucunu elde ederiz. $s = \sum_{i=1}^p s_i^A = \sum_{i=1}^p s_i^B$ olsun. $\sum_{i=1}^p s_i^A < |N^A| = n$ olduğundan $s \leq n$ olduğuna dikkat edin. Eğer $s = n$ ise, zaten göstermek istediğimiz sonuca ulaşmış oluruz. Eğer $s < n$ ise, A topluluğundan $n - s > 0$ tane sıradan bileşen ve B topluluğundan $n + k - s$ tane sıradan bileşen vardır. Fakat Lemma 11'e göre, A topluluğundaki herhangi bir sıradan bileşendeki bireyin, B topluluğundaki herhangi bir sıradan bileşendeki bireyle bir bağlantı ekleme konusunda teşvike sahip olduğunu biliyoruz. Bu, $\mathbf{g}$ 'nin ikili kararlı olduğu varsayımı ile çelişir. Bu nedenle, $s = n$ olmalıdır ve eğer $c_H \leq \bar{v} - \underline{v}$ ise ikili kararlı bir ağda topluluk B 'den tam olarak k sıradan bileşen vardır. ■

Önerme 18'in ispatı. Toplam risk altında bir risk paylaşım ağı düşünelim.

- i. Eğer $c_H > \bar{v} - \underline{v}$ ise, boş ağın tek ikili kararlı ağ olduğunu görmek için, tüm argümanlar toplam risk altında risk paylaşım ağlarına da uygulandığından, Önerme 12'in kanıtının ilk bölümüne bakılabilir.
- ii. Önermenin ikinci kısmı için, Lemma 17'a göre, tüm ikili kararlı ağlarda tam olarak k sıradan bileşeni vardır ve bunların hepsinin B topluluğundandır. Bu bileşenler $\{i_1\}, \dots, \{i_k\}$ olsun. $T = \cup_{t=1}^k \{i_t\}$ 'nin bu k sıradan bileşendeki tüm bireylerin kümesi olduğunu varsayalım. $\hat{N} \setminus T$ kümesiyle sınırlı alt ağlar kümesini düşünün. O zaman Önerme 12'daki tüm argümanlar geçerli olur ve göstermemiz gereken sonuca ulaşmış oluruz.

■

Lemma 19'un ispatı. Toplam risk altında risk paylaşım ağlarında da Lemma 6 ve Lemma 7 ispatlarında tüm argümanlar geçerlidir. ■

Lemma 24 *Asgari bağlı bir S bileşenin boyutu $|S| > 1$ ise, bu bileşende tek bir bağlantısı, $d_i(g) = 1$, olan en az bir $i \in S$ bireyi vardır.*

İspat. S kümesi $|S| > 1$ olmak üzere asgari bağlı bir bileşen olsun. Bu bileşende $s - 1$ bağlantı vardır ve $\sum_{i \in S} d_i(\mathbf{g}) = 2(s - 1)$ olur. Eğer tüm $i \in S$ için $d_i(g) \geq 2$ ise $\sum_{i \in S} d_i(\mathbf{g}) = 2s$ olur ki bu da bir çelişkidir. ■