

MÜHENDİSHANE'DEN CAMBRIDGE ÜNİVERSİTESİ'NE:
MEHMED EMİN PAŞA VE *CALCULUS OF VARIATIONS* ADLI
ESERİ

Zehra Bilgin*

FROM MUHENDISHANE TO UNIVERSITY OF CAMBRIDGE:
MEHMED EMIN PASHA AND *CALCULUS OF VARIATIONS*

ÖZ

On dokuzuncu yüzyılda yaşamış Osmanlı devlet adamı ve matematikçi Mehmed Emin Paşa (ö. 1267/1851) Osmanlı Devleti'nin tahsil için Mühendishane'den Avrupa'ya gönderdiği ilk subaylardandır. Eğitiminin ardından yurda dönüşünde önemli devlet görevlerine atanmış ve Mekteb-i Harbiye Nazırlığı, Rumeli Ordusu Müşirliği, Arabistan Ordusu Müşirliği gibi bürokratik ve askerî vazifelerde bulunmuştur. 1250/1834 yılında İngiltere'ye gönderilerek, burada askerî eğitimin ardından Cambridge Üniversitesi'nde matematik tahsili gören Emin Paşa, buradaki eğitiminin semeresi olarak *An Introduction to the Calculus of Variations: with a theoretical view of maxima and minima* adlı İngilizce bir eser kaleme almıştır. Matematiğin o dönemde yeni bir araştırma alanı olan varyasyonlar hesabına bir giriş mahiyetinde olan bu eser 1839 yılında Londra'da basılmıştır. Bu çalışmada Emin Paşa'nın *Calculus of Variations* eseri bilimsel açıdan değerlendirilerek dönemindeki konumu belirlenmeye çalışılmıştır. İngilizce olan eserin Türkçe tercümesi de hazırlanmıştır. Ayrıca Emin Paşa'nın İngiltere'deki eğitim süreci ve ülkesine döndükten sonraki hizmetlerine dair malumat, kaynaklar ve arşiv belgeleri ışığında derlenerek bir biyografi oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Mehmed Emin Paşa, Calculus of Variations, varyasyonlar hesabı, Geç Osmanlılar'da matematik, matematik tarihi.

* Dr. Öğr. Ü., İstanbul Medeniyet Üniversitesi, Bilim Tarihi Enstitüsü, e-mail: zehra.bilgin@medeniyet.edu.tr, ORCID: 0000-0002-6147-3018. Yazı Türü: Derleme Makale. Yazı geliş tarihi: 06.10.2023; kabul tarihi: 17.10.2023.

ABSTRACT

Nineteenth century Ottoman statesman and mathematician Mehmed Emin Pasha (d. 1267/1851) was one of the first officers sent to study abroad by Ottoman Empire. After his education abroad, he was appointed to important government posts and served in crucial burocratic and military positions such as Minister of Mekteb-i Harbiye, Marshal of the Rumeli Army, and Marshal of the Arabian Army. Emin Pasha was sent to England in 1250/1834 and studied mathematics at the University of Cambridge. As a result of his education here, he wrote a book *An Introduction to the Calculus of Variations: with a theoretical view of maxima and minima*. This work, which was an introduction to the calculus of variations, a new field of research in mathematics at that time, was published in London in 1839. In this study, Emin Pasha's *Calculus of Variations* is examined scientifically and its importance in its period is tried to be determined. A Turkish translation of the work has also been prepared. In addition, a biography of Emin Pasha's education process in England and his services after his return to his country were compiled in the light of sources and archival documents.

Keywords: Mehmed Emin Pasha, calculus of variations, mathematics in late-Ottomans, history of mathematics.

*

Giriş

Osmanlı topraklarından Avrupa şehirlerine eğitim amaçlı öğrenci gönderilmesi eğitimde modernleşme çabalarının alamet-i farikalarından biridir. Batılı eğitim modellerinin transferi ve gelişmiş Batı ülkelerinden teknoloji ve bilimsel bilgi aktarımı niyetiyle, devlet veya sivil destekli gerçekleştirilen bu faaliyet günümüze değin yaygınlığını ve popülaritesini korumuştur. Bu fikir her ne kadar on sekizinci yüzyılın ikinci yarısından itibaren aralıklarla dile getirilmiş ve bazı teşebbüsler olmuşsa da ilk öğrencilerin ancak 1830 yılında Sultan II. Mahmud saltanatında Paris'e gönderildiği görülür. Bu ilk girişimden sonra imparatorluğun fiilen sonlanmasına değin Mekteb-i Harbiye, Mühendishane-i Bahrî-i Hümayûn ve Berrî-i Hümayûn, Tıbbiye gibi modern eğitim kurumlarından yüzlerce başarılı öğrenci, Avrupa'nın Paris, Viyana, Londra, Berlin gibi büyük şehirlerinde mühendislikten temel bilimlere çeşitli alanlarda tahsillerine devam etmişlerdir. Bu öğrencilerin bir kısmı yurda döndükten sonra eğitim faaliyetlerine katkıda bulunmuş, bir kısmı ise mühim askerî veya bürokratik görevlere atanmışlardır.

İmparatorluğun Avrupa'ya gönderdiği ilk isimlerden biri olan Mehmed Emin Paşa örneği üzerinden yurt dışı eğitim programının serencamına bir pencere açmayı hedefleyen bu çalışmanın iki ayağı vardır: (i) Mehmed Emin Paşa'nın İngiltere'de gördüğü tahsil süreci ve sonrasında aldığı askerî ve idarî görevleri arşiv belgeleri ve kaynaklar üzerinden izleyerek bir biyografi oluşturmak; (ii) Emin Paşa'nın Cambridge Üniversitesi'ndeki eğitiminin sonunda kaleme aldığı *Calculus of*

Variations adlı eserini değerlendirmek ve bir tercümesini sunmak.¹ Söz konusu kitap, nadir eser sınıfından olup bilinen tek nüshası İstanbul Teknik Üniversitesi Mustafa İnan Kütüphanesi Nadir Eserler koleksiyonunda kayıtlıdır. Çalışmada kullanılan nüsha bu kütüphaneden elde edilmiştir.

Mehmed Emin Paşa'nın Hayatına Dair

Mühendishâne-i Berrî-i Hümayûn başhocalarından Hüseyin Rıfkı Tamanî'nin oğlu Emin Bey, Mekteb-i Harbiye Nâzırlığı'nın yanı sıra birçok üst düzey idarî ve askerî görevlere getirildiğinden, Osmanlı Arşivleri'nde erişilen belgeler ve döneme ait kaynaklar vasıtasıyla kariyerini izlemek mümkündür. Mehmed Esad'ın *Mir'ât-ı Mühendishâne-i Berrî-i Hümayûn* adlı eserinden öğrendiğimize göre istihkâm alay emini vazifesinde iken bir zabıt ve 10 talebe ile birlikte 1250-51/1834-35 yıllarında İngiltere'ye tahsil için gönderilmiştir. Bunlar istihkam kaymakamı Bekir Bey ile İbrahim, Derviş, Enis, Yusuf, Süleyman, Mahmud, Tahir, Arif, Ahmed ve Halil Efendilerdir. Yine Mehmed Esad'dan öğrendiğimize göre, mezkur Derviş Efendi sonradan kimyager Derviş Paşa, Tahir Efendi ise Mekteb-i Harbiye'nin cebir hocalarından Bostânizâde Hoca Tahir Paşa olacaktır.²

Devlet Arşivleri'nde 1250 yılının sonunda İngiltere'ye tahsil için gönderilen öğrencilerin yerlerine vardıkları ve okula kaydolduklarına dair verilen bir raporda 14 öğrenci olduğu bilgisi yer alır.³ Fakat öğrencilerin isimleri geçmez. Sayılar ve tarihler kıyaslandığında Emin Bey'in dâhil olduğu grubun bu belgede bahsedilenlerle aynı olduğu anlaşılır. Buradan 1250 yılının son ayında İngiltere'ye ulaştıkları sonucu çıkarılabilir. Ahmet Dönmez de Osmanlı-İngiliz ilişkileri üzerine yazdığı doktora tezinde bu 14 öğrencinin 30 Aralık 1834 tarihinde İstanbul'dan ayrıldıklarını kaydeder. Yine aynı kaynaktan *Mir'at*'ta zikredilmeyen 4 öğrencinin Mühendishâne-i Bahrî-i Hümayûn'dan Osman, Aziz, Salih ve Mustafa Efendiler olduğunu öğreniriz.⁴

1253 yılında yazılmış diğer bir belgede ise başka bir vesile ile İngiltere'ye tahsile gönderilen bazı isimlerden bahsedilir. Bunlar Lağımçı Miralay Bekir Bey, Lağımçı Kaymakamı Emin Bey ve Mühendis İbrahim, Derviş, Enis, Arif, Mahmud ve Halil Efendilerdir.⁵ Mehmed Esad'ın zikrettiği Yusuf, Süleyman, Tahir ve Ahmed Efendilerden bahsedilmez. Bu belgede terzilik eğitimi üzerine Viyana'ya gönderilen bazı öğrencilere, daha önce İngiltere'ye gönderilen, isimlerini yukarıda zikrettiğimiz

¹ Makaledeki alıntı veya metin, tüm tercümeler yazara aittir.

² Mehmed Esad, *Mir'ât-ı Mühendishâne-i Berrî-i Hümayûn*, İstanbul: Karabet Matbaası, 1312, s. 64-65.

³ Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *Hatt-ı Hümayûn (HAT)* 1179/46582, 29 Zilhicce 1250.

⁴ Ahmet Dönmez, "Osmanlı-İngiliz İlişkileri: Diploması ve Reform (1833-1841)", doktora tezi, Selçuk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 2013, s. 174.

⁵ Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *Cevdet Askeriye (C.AS)* 191/8251.

öğrencilere verilen ücretler örnek gösterilerek her birine 3000 kuruş harcırah verilmesi talep edilmektedir. Dönmez'in araştırmasında da İngiltere'ye gönderilen öğrencilerin harcamalarının Sultan'a büyük bir yük olduğundan bahsedilir.⁶

Dönmez, tezinde, İngiltere'ye eğitime gönderilen bu ilk grubun oraya varmalarından ülkeye dönüşlerine kadar geçirdikleri dönemi arşiv belgelerinin ışığında ayrıntılarıyla ortaya koyar. Buna göre öğrencilerin okullara kabul edilme süreçleri kolay olmamıştır. Başlangıçta Porstmouth, Woolwich ve Sandhurst'teki askerî okullara donanma, piyade, topçuluk ve mühendislik eğitimi almak üzere yerleştirilmeleri düşünülmüştür. Fakat hem diplomatik ilişkilerdeki gerginlik hem askerî bürokrasi Osmanlı subaylarının askerî okullarda resmi olarak bulunmalarına engeldir. Ayrıca öğrencilerin İngilizce dil yetersizliği de önemli bir sorun olarak ortaya çıkmıştır. Bunun üzerine öğrenciler ilk iki yıl İngilizce özel dersler almışlar, askerî okullara yaşları büyük olduğu gerekçesiyle öğrenci olarak kabul edilmediklerinden özel dersler ve misafir öğrenci statüsüyle askerlik eğitimlerini sürdürmüşlerdir.

Osmanlı Devleti'nin başlangıçtaki talebi öğrencilere, kendileri için takdir edilen konularda eğitim gördükten sonra uzmanlıklarını bildiren diploma belgelerinin verilmesidir. Fakat müzakereler sonunda ancak Woolwich Kraliyet Harp Akademisi'nde misafir öğrenci olarak bulunmalarına razı olunmuştur. Bu sırada eğitimleri özel bir plan dâhilinde yönetilmiş ve daha çok teorik eğitime tabi tutulmuşlardır. Bir an evvel eğitimlerini tamamlayıp ülkelerinde hizmet edecek seviyeye gelmek amacına binaen öğrencilerden bazıları pratik imkânının azlığından şikâyet ettiklerinde elçilik nezdinde yapılan başvurular siyasî ilişkilerin de kısmen düzelmesi ile nihayet kabul görmüş, bir nebze de olsa pratik eğitim imkânı da bulmuşlardır.⁷ Yine de bu belgeler ve yazışmalar öğrencilerin hiçbir zaman büyük bir misafirperverlikle karşılanmadıklarını göstermesi açısından dikkate değerdir.

Bu ortamda Emin Bey'in nasıl olup da Cambridge Üniversitesi'ne dâhil olduğuna dair bir kayıt henüz bulunamamıştır. Dönmez, Emin Bey'in Derviş Efendi ile birlikte madenlerin bulunması, çıkarılması ve dökümü konusunda eğitim görmek üzere gönderildiğini söyler.⁸ Fakat askerî okulların bu öğrencileri kabulde gösterdikleri isteksizlik sonrasında bu alanlarda eğitim aldığına dair kesin bir kayıt yoktur. Bu dönemde öğrencilerin eğitime nezaret etmekle görevli İngiliz binbaşısının raporunda İngiltere'ye gönderilen talebeler arasında Emin Bey'in kendisinden başka subay olan tek kişi Bekir Bey ile birlikte derslere devam etmek yerine bilgilerini arttırmak amaçlı kimya, mineraloji ve matematik kitapları okumalarının gerekliliğine dair bir kayıt mevcuttur.⁹ Bu şartlar altında matematik eğitimi almasına nasıl karar verildiği sorusu halen aydınlatılmayı beklemektedir.

⁶ Dönmez, "Osmanlı-İngiliz İlişkileri", s. 181, 183.

⁷ Dönmez, "Osmanlı-İngiliz İlişkileri", s. 175-184.

⁸ Dönmez, "Osmanlı-İngiliz İlişkileri", s. 178.

⁹ Dönmez, "Osmanlı-İngiliz İlişkileri", s. 180.

Cambridge Üniversitesi mezun kayıtlarından Emin Bey'in 23 Ekim 1837 tarihinde Trinity Hall'a "fellow commoner" statüsü ile kabul edildiğini öğreniyoruz.¹⁰ Bu rütbe genellikle zengin ve aristokrat ailelerden gelen öğrencilere verilirdi ve bu sınıfa dâhil olan öğrenciler diğer bazı ayrıcalıklarla birlikte Hall'ın başkanı ve üyelerinin yemek yediği özel masada oturma hakkına sahipti.¹¹ Üniversite kayıtlarında Emin Bey için düşülen "Sultan tarafından gönderildi" notu bu kabulü açıklığa kavuşturur. Belli ki Sultan gönderdiği öğrenciler için standartların üzerinde ödemelerde bulunuyordu. Buradan Emin Bey'in Cambridge eğitiminin haberli ve izinli olduğu, hatta desteklendiği anlaşılır. Askerî eğitimin beklendiği gibi gitmemiş olmasının bu tercihe ve izne bir sebep olması muhtemeldir.

Londra'da bulundukları sırada Osmanlı subaylarının Sultan tarafından teşvik amaçlı terfi ettirilmesi kararlaştırılmıştır.¹² Buna binaen 1253 yılında Emin Bey'e mirlivalık rütbesi verilmiştir.¹³ Böylece Emin Bey, Emin Paşa olmuştur. Nitekim Cambridge'den ayrılışının haber yapıldığı *The Cambridge Chronicle* gazetesinin 12 Aralık 1840 tarihli nüshasında Emin Paşa olarak geçer:

Cambridge'de Trinity Hall'un sabık üyelerinden, meşhur Türk matematikçi Emin Paşa, ilmi birikim için beş yıldan fazladır bulunduğu Avrupa'dan İstanbul'a döndü. Kendisinin Maarif-i Umumiye Nazırlığı görevine veya Mühendislik Okulu yöneticiliğine atanmasının muhtemel olduğu konuşuluyor.¹⁴

Gazetenin aldığı duyumlar hepten yersiz değildir. Nitekim Emin Paşa, yurda döndükten hemen sonra Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye Nazırlığı görevine atanacaktır. Emin Paşa, Londra'dan ayrıldıktan sonra bir süre Paris'te ikamet eder, Fransızcasını geliştirir ve buradayken Fransızca olarak roket nazariyatı üzerine bir eser kalem alır. *Mémoire sur un Nouveau Système de Confection des Fusées de Guerre* ismini taşıyan bu eser 1840 yılında Paris'te basılır.¹⁵ Ardından Berlin ve Viyana'da geçirdiği birkaç ayda askerî okullarda ve tesislerde incelemelerde bulunur ve 1256 yılında yurda döner.¹⁶

¹⁰ "ACAD-A Cambridge Alumni Database", University of Cambridge Library, <https://venn.lib.cam.ac.uk/cgi-bin/search2018.pl?sur=&suro=w&fir=&firo=c&cit=&cito=c&c=all&z=XTUR&tex=&sye=&eye=&col=all&maxcount=50> (erişim: 9 Mart 2023).

¹¹ "Glossary of Cambridge-related Terminology", University of Cambridge Library, <https://www.lib.cam.ac.uk/university-archives/glossary/fellow-commoner> (erişim: 12 Mart 2023)

¹² Dönmez, "Osmanlı-İngiliz İlişkileri", s. 182.

¹³ Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *Hatt-ı Hümayûn (HAT)* 309/18272.

¹⁴ "Emin Pacha, late of Trinity hall, Cambridge, the celebrated Turkish mathematician, has returned to Constantinople from Europe, where he has spent more than five years in the acquisition of science; it is spoken of as being probable that he will be appointed minister of public instruction, or a director of a polytechnic school.", *Cambridge Chronicle and Journal and Huntingdonshire Gazette*, 12 Aralık 1840, s. 2.

¹⁵ Emin Pacha, *Mémoire sur un Nouveau Système de Confection des Fusées de Guerre*, Paris: Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1840.

¹⁶ Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *İrade Hâriciye (İ.HR.)* 5/249.

Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye Nazırlığı görevi sırasında Harbiye'nin nizamı ve eğitimin iyileştirilmesi hususunda dikkate değer gayret sarf eder. Bu dönemde okulda gerçekleştirdiği yenilikler ve eğitimde ve yönetimde izlediği usule dair ayrıntılı malumat Mehmed Esad'ın *Mir'at-ı Mekteb-i Harbiye* eserinden ve Salih Zeki'nin *Kâmûs-i Riyâziyyât*'ında "Emin Paşa" maddesinden okunabilir.¹⁷

Emin Paşa Mekteb-i Harbiye Nazırlığı görevinin ardından Dâr-ı Şurâ-yı Askerî azalığına tayin edilir ve 1259 yılının sonunda reisliğe atanır.¹⁸ 1261 yılının sonunda ise Ordu-yı Hümâyûn Reis-i Erkanlığı görevine getirilir.¹⁹ 1262 yılı başında Cebel-i Lübnan vilayetindeki karışıklıkları yerinde incelemek ve meselelerin hallini sağlamak üzere görevlendirilir.²⁰ 1263 yılında Rumeli Ordusu Müşirliğine ve son olarak 1265 yılında Arabistan Ordusu Müşirliğine tayin edilir.²¹ Rumeli Ordu Müşiri iken Arnavutluk'taki isyanları bastırmak için görevlendirilir.²² Tüm bu malumattan anlaşıldığı üzere ilmi çalışmalarıyla birlikte başarılı bir askerî kariyer yürütür. Arabistan Ordusu Müşirliği vazifesini sürdürmekte iken 16 Zilkade 1267 (12 Eylül 1851) tarihinde Şam'da vefat eder.²³

Varyasyonlar Hesabı ve Emin Paşa'nın *Calculus of Variations* Adlı Eseri

Varyasyonlar hesabı fonksiyonların tanım kümesindeki küçük değişiklikler olan varyasyonları kullanarak fonksiyonların maksimum ve minimum değerlerini bulmakta kullanılan bir hesap yöntemidir. Söz konusu fonksiyonların tanım kümesi

¹⁷ Mehmed Esad, *Mir'at-ı Mekteb-i Harbiye*, İstanbul: Artin Asaduryan Şirket-i Mürettebiye Matbaası, 1310, s. 32-43; Salih Zeki, *Kamus-ı Riyaziyyat*, İstanbul Üniversitesi Nadir Eserler Kütüphanesi T910, s. 539-542. Salih Zeki *Kâmûs-i Riyâziyyât*'ın Emin Paşa ile ilgili maddesinde büyük oranda Mehmed Esad'ın metninden yararlanmış, bununla birlikte Salih Zeki'nin metninde bazı hatalar mevcuttur. Mesela Salih Zeki, Emin Paşa'nın 1259 yılında yurda dönüşünde mirlivalık rütbesine terfi ettiğini söyler. Hâlbuki yukarıda zikrettiğimiz üzere arşiv belgelerinde Emin Bey'in henüz İngiltere'de iken mirlivalık rütbesi aldığı sabittir. Nitekim *Cambridge Chronicle* gazetesi de kendisinden "Emin Paşa" olarak bahseder. Ayrıca Paşa, 1256 yılında İstanbul'a dönmüştür. Mehmed Esad'ın Emin Paşa hakkında yazdığı bölümün ve Salih Zeki'nin mezkûr Emin Paşa maddesinin Türkçe transliterasyonları için bkz. Atilla Polat, "Mekteb-i Harbiye Nazırlarından Matematikçi Mehmed Emin Paşa'nın Biyografisine Giriş", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları*, S. 20, c. 2, 2019, s. 59-74. Polat, makalesinde, Emin Paşa'nın İstanbul'a dönüşünden sonraki hayatı ve görevleri için Mehmed Esad ve Salih Zeki'nin metinlerini esas aldığını belirtir. Bu sebeple makalesinde örnek olarak mirlivalık rütbesinin yurda döndükten sonra verildiği bilgisini tercih etmiştir.

¹⁸ Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *Hatt-ı Hümâyûn (HAT)* 1643/5.

¹⁹ Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *Hatt-ı Hümâyûn (HAT)* 1643/16.

²⁰ Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *Mâbeyn-i Hümâyûn İrâdeleri (MB.İ)* 1/17.

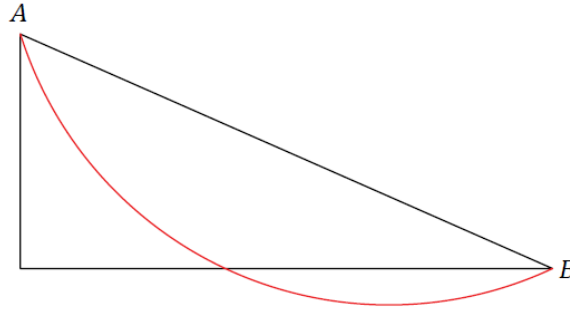
²¹ Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *Sadaret Mektubi Kalemi Mühimme Evrakı (A.MKT.MHM)*, 2/65; *İrâde Dâhiliye (İ.DH)* 161/8361; *Sadaret Mektubi Kalemi (A.MKT)* 208/33.

²² Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *Sadaret Âmedi Kalemi Defterleri (A.AMD)* 2/40; *Sadaret Mektubi Kalemi (A.MKT)* 100/28.

²³ Atilla Polat, "Mekteb-i Harbiye Nazırlarından Matematikçi Mehmed Emin Paşa'nın Biyografisine Giriş", s. 65.

reel değerli olduğunda türev operasyonu ile basitçe maksimum ve minimum değerler elde edilebilir. Fakat fonksiyonlar, fonksiyonları girdi olarak aldığı anda ise fonksiyonel denen özel bir çeşit fonksiyon olarak tanımlanırlar ve bu tip fonksiyonların maksimum ve minimum değerleri için varyasyonlar hesabı gerekir. Fonksiyonları ve türevlerini aynı anda içeren belirli integraller fonksiyonellere bir örnektir.

Bu tip problemler için en basit örnek iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı bulma sorusudur. Öklides geometrisinin ideal uzayında bu mesafe iki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğudur (Şekil 1). Fakat gerçek dünyada mesafeyi alacak nesnenin hızını veya izleyeceği yolu etkileyecek farklı kuvvetler bulunabilir. Matematik tarihinde çok bilinen örneklerden biri Brakistokron eğrisidir. Bir düzlemde birbirinin altında olmayan A ve B noktalarından, A noktasından B noktasına yer çekiminin etkisi altında ulaşacak bir parçacığın izleyeceği en hızlı yol olarak tanımlanan bu eğriyi bulma problemi ilk kez Johan Bernoulli (ö. 1748) tarafından 1696 yılında formüle edilerek çağdaşı matematikçilerden cevap talep edildi. Jakob Bernoulli (ö. 1705), Isaac Newton (ö. 1727), Gottfried Leibniz (ö. 1716), Marquis de l'Hôpital (ö. 1704) gibi önde gelen matematikçiler probleme çözümler sundular.²⁴



Şekil 1. Brakistokron Eğrisi

Brakistokron eğrisinin genelleştirmeleri üzerine çalışan Bernoulliler, Leonhard Euler'in (ö. 1783) de konuya dâhil olmasına yol açtı, Euler ise Joseph Louis-Lagrange'ı (ö. 1813) etkiledi. O sırada on dokuz yaşında bir genç olan Lagrange'ın bulduğu bir yöntem olan varyasyonlar, Euler'in isimlendirmesi ile *varyasyonlar hesabının* temelini oluşturdu.

Emin Paşa Cambridge Üniversitesi'ndeki eğitiminin sonunda varyasyonlar hesabına dair bir makale kaleme aldı. Bu çalışma müstakil bir eser olarak 1839 yılında Metcalfe and Palmer Yayınevi tarafından *An Introduction to the Calculus of Variations: with a theoretical view of maxima and minima* (Varyasyonlar Hesabına

²⁴ Herman H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, New York: Springer, 1980, s. 30-46.

Giriş: Maksima ve Minimaya Teorik Bir Bakış İle) adıyla basıldı.²⁵ Emin Paşa bu makalesini yazdığı sırada varyasyonlar hesabının temel metinleri kaleme alınmıştı. Makalenin sonunda atıf yaptığı Fransız matematikçi Siméon Poisson'un 1831 yılında yayınlanan "Mémoire sur le Calcul des Variations"²⁶ adlı makalesi ile Alman matematikçi Carl Jacobi'nin 1836 tarihli "Sur le Calcul des Variations et sur la Théorie des Équations Différentielles"²⁷ başlıklı makalesi bu metinlerden ikisidir. Her iki metin de varyasyonlar hesabının ileri tekniklerini içerir. Jacobi'nin makalesi sonraki yıllarda şerhleriyle etkisini sürdürecektir.

"An Introduction to the Calculus of Variations" makalesinin girişinde Emin Paşa'nın Cambridge Üniversitesi mensuplarına hitaben kaleme aldığı bir metin bulunur. Eserin telif sebebine dair bu önsözden bazı çıkarımlarda bulunulabilir. Bu metne "To the Members of The University of Cambridge, Gentlemen" (Cambridge Üniversitesi Üyelerine, Baylar) hitabıyla başlanması metnin haddizatında Cambridge Üniversitesi'nde verilmiş konuşmanın yazılı hali olduğu ihtimalini akla getirir. Nitekim 27 sayfalık bir çalışma olan makale konuya bir giriş mahiyetinde, bir seminer dersi olabilecek niteliktedir. Fakat bu husus kesin olarak açıklığa kavuşmuş değildir.

"Önsöz"de Cambridge Üniversitesi üyesi olmaktan duyduğu onur ve mutluluğu gösteren ağdalı cümleler dikkat çeker. Emin Paşa, bu çalışmasını, aldığı eğitimde kendisine sunulan imkânlar ile gösterilen ilgi ve alakaya bir teşekkür niyetiyle kaleme aldığını beyan eder. Aynı zamanda eğitiminin de ilk meyvesi olarak değerlendirir:

Yabancı bir ülkede, memleketimden uzakta Büyük Britanya'nın soylu evlatlarından arzu edebileceğim her türlü eğitim ve ilgiyi almış bulunuyorum, Britanya cömertliği hakkındaki daha önceki yüksek görüşlerimin beni ummaya yönelteceğinden bile daha fazlasını. Bana sunulan paha biçilemez iyiliklere göstermem gereken teşekkürün kalıcı bir anısını bırakmak üzere küçük bir kitapçık yayınlamayı düşünmeye teşvik edildim. Bu çalışmadaki ana amacım Üniversite'den edindiğim tüm faydalara teşekkürlerimi kalıcı bir şekilde ifade etmek olmalıydı. Bu gayeyle, aşağıdaki "Giriş" seçildi ve eksikleri daha az fark edilebilir veya daha çok mazur görülebilir umuduyla onu indirgeyebileceğim en küçük kapsama daraltılarak ayrı bir makalenin konusu yapıldı. Umarım saygıdeğer ilim mevkiiinizde ekilen tohumların ilk meyvesi ve Cambridge'deki hocalarım ve arkadaşlarımı birlikte hatırlayacağım şükran ve muhabbetin bir teminatı olarak kabul edilir.²⁸

Emin Paşa'nın makalesi varyasyonlar hesabına bir giriş metnidir. Hacminin küçüklüğü Emin Paşa'nın da önsözde belirttiği üzere konunun ayrıntılarına girmeye

²⁵ M. Z. Ameen Bey, *An Introduction to the Calculus of Variations: with a theoretical view of maxima and minima*, Cambridge: Metcalfe and Palmer, 1839.

²⁶ Siméon Poisson, "Mémoire sur le Calcul des Variations", *Mémoires de l'Académie des Sciences* Tome XII, 1833, s. 22-331.

²⁷ Carl Jacobi, "Sur le Calcul des Variations et sur la Théorie des Équations Différentielles", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées Ire série* Tome 3 1838, s. 44-59.

²⁸ M. Z. Ameen Bey, *Calculus of Variations*, s. 2-3.

müsaade etmemiştir. Bu açıdan döneminde tedavülde olan, bazıları yukarıda zikredilmiş metinlerle kıyaslandığında bir araştırma makalesinden çok bir ders notu izlenimini verir. Bununla birlikte konunun temellerini anlamak için ziyadesiyle yararlı bir metindir.

Makale, maksimum ve minimum kavramlarının tanımlarıyla başlar ve tarihten konuya temaslarla problemlerden örnekler verilir. Pierre de Fermat'ın (ö. 1665) maksimum ve minimum değerleri bulmak için uyguladığı, sonsuz küçük belirsiz nicelikleri denklemden sadeleştirme yöntemi bir örnekle açıklanır. Daha sonra diferansiyel hesabın temel yöntemi kısaca anlatılır.

Diferansiyel hesapta ele alınan fonksiyon işlemler boyunca değişmeden kaldığı müddetçe maksimum ve minimum hesabı basit bir türev alma işlemiyle yapılabilir. Değişkenlerin bazıları bir değişkenin fonksiyonu ise ve aralarındaki bağıntı verilmişse biraz daha karmaşık olmakla birlikte yine türev alma işlemiyle sonuç elde edilir. Eğer bu ikinci durumda değişkenler arasındaki bağıntı bilinmiyorsa yine gerekli işlemler izlenerek bazı denklemler bulunur. Bu denklemlerden hangi durumlarda maksimum ve minimuma ulaşmanın imkânsız olacağı, hangi durumda değerlerden sadece birine ulaşılacağı ve farklı değişkenler için görece maksimum ve minimum değerlerinin şartları belirlenebilir. Emin Paşa bu şartlara götüren yolları teorik olarak anlattıktan sonra iki örnek ile yöntemi ayrıntılı olarak açıklar.

İlk problem “herhangi noktasındaki teğet ile apsisin eksenine dik verilen iki doğru kesiştiğinde teğet ve eksen arasında sınırlanan dörtgen parçanın alanının maksimum veya minimum olacağı bir eğri bulmak” ikincisi ise “herhangi bir noktasındaki alt normali ve apsisinin toplamının karesi minimum olan eğriyi bulmak”tır. Problemlerin çözümü makalemizin son bölümde verdiğimiz, *Calculus of Variations* eserinin tercümesinden izlenebilir.

Diferansiyel hesabın sıradan problemlerine dair bu bahisten sonra Emin Paşa Brakistokron eğrisi problemi ile varyasyonlar hesabına giriş yapar:

...verilen bir noktadan diğerine en hızlı azalan bir eğri bulunmak istensin. Bu durumda, ilk noktada x yatay ve y dikey olarak ölçülür ve zaman u ile gösterilirse

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}$$

veya

$$u = \int_x V = \int_x \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{2gy}}$$

elde ederiz. İntegral, verilen noktaların apsisleri olan x' ve x'' sınırları arasında alınmalıdır. Fakat bu ifadenin $y = \phi(x)$ verilmediği müddetçe integrallenemeyeceği açıktır. Maksima ve Minima ile ilişkili bu problemlerin geniş bir kümesi geometri ve fizik araştırmalarında gerçekten sıklıkla ortaya çıkarlar. Çözümleri için Diferansiyel

Hesapta kurulan yöntemler açıkça yetersizdir. Bu ilişkiyi veya $\phi(x)$ in formunu keşfetmek için analizin daha yüksek bir dalına, Varyasyonlar Hesabına müracaat etmek gerekir.

Varyasyon hesabını Lagrange'ın bulduğu yönteme dayandıran Emin Paşa, bu yöntemle söz konusu hesabın sistemleştirildiğini ve Farklar Hesabı'nın (Calculus of Differences) bir alt dalı haline geldiğini ifade eder. Ardından *varyasyon* tanımını verir. Buna göre x , y değişkenleri ile y 'nin x 'e göre diferansiyel katsayılarını değişken olarak içeren bir V fonksiyonu için, $\int_x V$ integralini maksimum veya minimum yapacak $y = \phi(x)$ bağıntısını bulmak problemini ele alalım. Bu durumda integral hem x ve y değişkenlerinin değişimi ile hem de farklı $y = \phi(x)$ bağıntılarına göre değişir. $\phi(x)$ fonksiyonunun $\psi(x)$ 'e dönüşümü arasındaki fark, yani $\psi(x) - \phi(x)$, y 'nin *varyasyonu* olarak adlandırılır ve δy ile gösterilir. Benzer şekilde δx , x 'in varyasyonunu belirtir.

Bundan sonra Emin Paşa, varyasyon hesabı yöntemini temel seviyede kavramak için yararlı bir örnek vermiştir. Yöntemi daha iyi anlamak için bu makalenin son bölümünde verilen tercümede 8. maddede yer alan örnek incelenebilir.

Makalenin geri kalanında Emin Paşa varyasyon operatörü δ 'nın tabi olduğu bazı kuralları, sık kullanılan bazı fonksiyon türlerinin varyasyonlarını ve bunların ispatlarını verir. Bu kurallar şöyle listelenebilir:

i. Varyasyonların türevi ve integrali alınabilir. Türev ve integral fonksiyonlarının varyasyonları hesaplanabilir. Zira varyasyonlar da birer fonksiyondur. Yani

$$d\delta y, \delta dy, \delta \int V, \int \delta V$$

gösterimleri anlamlıdır.

ii. Bir niceliğin diferansiyelinin varyasyonu, niceliğin varyasyonunun diferansiyeline eşittir. Yani $\delta dy = d\delta y$ eşitliği sağlanır.

Benzer şekilde bir fonksiyonun integralinin varyasyonu, fonksiyonun varyasyonunun integraline eşittir. Yani $\delta \int V = \int \delta V$ eşitliği sağlanır.

iii. $p = \frac{dy}{dx}$ türev fonksiyonunun varyasyonu $\delta p = \frac{d\delta y}{dx} - p \frac{d\delta x}{dx}$ ve $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ ikinci türev fonksiyonunun varyasyonu $\delta q = \frac{d\delta p}{dx} - q \frac{d\delta x}{dx}$ olur. Bu şekilde daha yüksek dereceden türevlerin de varyasyonları hesaplanabilir.

iv. İki değişkenli bir fonksiyonun ve değişkenlerden birinin diferansiyel katsayılarının varyasyonunu, her iki değişkenin varyasyonları ve aynı diferansiyel katsayıları cinsinden bulma yöntemi.

v. Üç değişkenli bir fonksiyon ve bu değişkenlerden ikisinin üçüncünün bir fonksiyonu kabul edilerek elde edilen diferansiyel katsayılarının varyasyonunu bulma yöntemi.

vi. Değişkenlerinden birinin diğer ikisinin bir fonksiyonu olduğu üç değişkenli bir fonksiyonun varyasyonunu bulma yöntemi.

vii. Bir eğrinin alttanjantının (*subtangent*) varyasyonunu bulma yöntemi.

Tüm bu kurallar ve problem örneklerinden sonra Emin Paşa makalesini diferansiyel hesap ve varyasyon hesabı arasındaki mühim farka değinerek nihayete erdirir. Sadece diferansiyel operatörü d 'yi içeren fonksiyonların varyasyonunu hesaplamak zor değildir. Zira bu durumda varyasyon türeve tekabül eder. Dolayısıyla d operatörlerini δ ile değiştirmek yeterlidir. Fakat fonksiyonda integral operatörü bulunuyorsa mesele farklı bir hal alır.

Diferansiyel hesabın en bilinen ve temel sonucuna binaen diferansiyel ve integral operatörleri birbirinin ters operatörleri olduğundan $\int_x V$ fonksiyonunun türevi basitçe V olarak bulunur. Fakat aynı fonksiyonun varyasyonu olan $\delta \int_x V$ bambaşka bir fonksiyondur. Bu tip problemlerde varyasyon hesaplamak gerekir. Dolayısıyla “Varyasyonlar hesabının ana amacı V fonksiyonu y ve onun diferansiyel katsayılarını içermek üzere

$$\delta \int_x V, \quad \delta \int_y \int_x V, \dots$$

gibi fonksiyonların varyasyonlarına ulaşmaktır.”

Emin Paşa, sunduğu giriş metninin bu geniş konunun çok az bir kısmına değindiğine işaret ederek ve ilgilileri Poisson ve Jacobi'nin henüz yayınlanmış çalışmalarıyla yönlendirerek makalesini sonlandırır.

Değerlendirme

Emin Paşa'nın varyasyonlar hesabına dair bu makalesi hem matematikte yeni bir araştırma alanında yazılan ilk metinlerden olması hem de bir Osmanlı matematikçisinin çağındaki tartışmaları takip ederek konuya katkı sunması açısından Osmanlı son dönem matematik tarihi çalışmalarında önemli bir konumdadır. Ayrıca eserin Emin Paşa'nın Cambridge Üniversitesi'ndeki çalışmaları sonrasında ve bu kurumla ilişkili olarak kaleme alınması eğitim tarihimizde dikkate değer bir yer tutan yurt dışına öğrenci ve personel gönderme politikasının uygulamaları ve çıktıları açısından da incelemeye konu olmayı hak eder.

Makalenin içeriğine dair yapılan incelemede ortaya konulduğu üzere, çalışma varyasyonlar hesabına bir giriş özelliği taşır. Varyasyonlar hesabına neden ihtiyaç duyulduğu tartışılarak temel tanımlar ve yöntemler örneklerle açıklanır. Nitekim Emin Paşa da önsözde bir giriş metni telif ettiğine işaret ederek çalışmanın hacminin ve amacının ancak bu kadarına müsaade ettiğini belirtmiştir. Bununla birlikte konuyla alakalı ileri okumalar için dönemin kapsamlı ve öncü metinlerinden ikisine atıfta bulunması konunun inceliklerinden bihaber olmadığını gösterir. Bu sebeple Emin Paşa'yı ancak bir giriş metni yazabilecek seviyede değerlendirmek hatalı olacaktır. Bilakis, artık olgunlaşmış, çok bilinen bir konuyu değil de matematik

camiasının henüz gündemine girmiş ve gelişmekte olan bir konuyu ele alarak temel seviyede açıklayıcı bir metin kaleme alması bir tercih olmalıdır. Nitekim eserin Cambridge Üniversitesi üyelerine sunulması ve Cambridge’de Metcalfe and Palmer Yayınevi tarafından yayınlanmış olmasını da akademik değerine dair bir işaret olarak algılamak mümkündür.

Emin Paşa’nın bu çalışması ile ilgili aydınlatılmayı bekleyen noktalardan biri çalışmanın tam olarak ne amaçla yazıldığı sorusudur. Eğitimi tamamlamış olmanın bir nişanesi, kendisinden talep edilen bir bitirme tezi mi veya seminer metni mi, yoksa tamamen kendi şahsi merakı ve teşebbüsü ile yürütülmüş bir çalışma mı olduğu sorularına elimizdeki kaynaklarla bir cevap bulabilmiş değiliz. Salih Zeki *Kâmus-ı Riyâziyyat*’ta Emin Paşa ile ilgili maddede Vidinli Tefvîk Paşa’dan nakil ile eserin yazılış sebebi ve içeriği hakkında bazı değerlendirmelerde bulunur.²⁹ Buna göre eserin Cambridge Üniversitesi’nde “cemiyet üyeliğine kabul” münasebetiyle hem bir teşekkür ve saygı göstergesi hem de tahsilinin ilk meyvesi olarak yazıldığını ve cemiyete sunulduğunu belirtir. Bununla birlikte Emin Paşa’nın, üniversitenin bir cemiyetine üyeliğe kabul edildiği iddiası somut delile muhtaçtır. Cambridge Üniversitesi’nin döneme dair arşivlerinde konuyla ilgili bir evrak araştırması hem bu soruya hem de eserin yazılış amacına yönelik sorulara bir cevabı muhtemel kılabilir. Ayrıca böyle bir araştırma ile Emin Paşa’nın Cambridge’de geçirdiği yılları aydınlatmak açısından da faydalı olacaktır.

Calculus of Variations’ın Tercümesi

VARYASYONLAR HESABINA GİRİŞ
MAKSİMA VE MİNİMAYA TEORİK BİR BAKIŞ İLE
ALBAY M. Z. EMİN BEY, TRINITY HALL; CAMBRIDGE MENSUBU
CAMBRIDGE ÜNİVERSİTESİ ÜYELERİNE,
BAYLAR,

Aranızda ikamet ettiğim süre boyunca şanlı kardeşliğinizin tüm sınıflarının bana göstermiş olduğu evrensel nezaket ve bilge kuruluşunuzun bir üyesi olarak kabul edilmemin seçkin onuru bana tasavvur edilebilmesi için ancak tecrübe edilmesi gereken bir zevk ve mutluluk verdi. Ne size karşı duyduğum minnettarlık duygularımı ifade edecek belagate, ne de karşılık beklemeksizin bana sunduğunuz nezaketinize minnet borcumu ödeme imkânına sahip olduğum düşüncesiyle bazen bu mutluluk ve zevk lekeleniyor. Hangi dil, bilginin berrak pınarından yudumlamasına izin verilmiş olan kimsenin hislerini veya o yüce ve tükenmez zevkte, bilimleri öğrenmede, kendini şımartmanın imkânlarını ona sunanlara, onu üniversiteye kabul edenlere, Ölümsüz Newton’un ayak izlerine bakmasına izin verenlere, bu şanlı Filozofu yıldızlara giden yolunda (ölçülemez bir uzaklıktan da olsa) takip etmesini

²⁹ Salih Zeki’nin ve Vidinli Tefvîk Paşa’nın görüşleri, Atilla Polat’ın Emin Paşa makalesinde sunduğu, *Kâmus-i Riyâziyyât*’ın ilgili maddesinin transliterasyonundan okunabilir. Bkz. Atilla Polat, “Mekteb-i Harbiye Nazırlarından Matematikçi Mehmed Emin Paşa’nın Biyografisine Giriş”, s. 71.

ve yaratılışın ağır kütlelerini, uzayın engin sınırsızlığını ve evrenin Kadir-i Mutlak Yaratıcısının sıfatlarını görmeyi mümkün kılanlara karşı duygularını ifade edebilir? Yabancı bir ülkede, memleketimden uzakta Büyük Britanya'nın soylu evlatlarından arzu edebileceğim her türlü eğitim ve ilgiyi almış bulunuyorum, Britanya cömertliği hakkındaki daha önceki yüksek görüşlerimin beni ummaya yönelteceğinden bile daha fazlasını. Bana sunulan paha biçilemez iyiliklere göstermem gereken teşekkürün kalıcı bir anısını bırakmak üzere küçük bir kitapçık yayınlamayı düşünmeye teşvik edildim. Bu çalışmadaki ana amacım üniversiteden edindiğim tüm faydalara teşekkürlerimi kalıcı bir şekilde iade etmek olmalıydı. Bu gayeyle, aşağıdaki "Giriş" seçildi ve eksikleri daha az fark edilebilir veya daha çok mazur görülebilir umuduyla onu indirgeyebileceğim en küçük kapsama daraltılarak ayrı bir makalenin konusu yapıldı. Umarım saygıdeğer ilim mevkiiinizde ekilen tohumların ilk meyvesi ve Cambridge'deki hocalarım ve arkadaşlarımı birlikte hatırlayacağım şükran ve muhabbetin bir teminatı olarak kabul edilir.

Baylar,
Sizlerin en sadık ve mütevazı hizmetçiniz
Olmanın onuruyla,
M. Z. Emin.

Varyasyonlar Hesabına Giriş

1. Değişken bir nicelik artarak sonlu bir büyüklüğe ulaşır ardından azaldığında bu büyüklük bu değişken niceliğe göre bir maksimum olur. Bir nicelik azalarak belirli bir değere ulaşır ardından arttığında bu değere onun minimumu denir. Ayrıca, maksimum ve minimum kabul eden ancak bu tür niceliklerdir. Dolayısıyla herhangi bir sayının bölünebileceği iki kısmın çarpımı bir maksimum, verilen bir noktanın bir doğruya uzaklığı bir minimum kabul ederken, verilen bir noktanın bir elipsin çevresine uzaklığı hem bir maksimum hem de bir minimuma sahip olmaya elverişlidir.

Maksima ve minima³⁰ problemleri ilk defa Apollonius'un *Konika*'sında görülür. 5. Kitap'ın neredeyse tamamı koni kesitlerinin eğrileri üzerinde verilmiş noktalardan çizilebilecek en uzun ve en kısa doğruları belirleme problemi ile ilgilenir. Apollonius'un yöntemi basitçe bir noktadan eğriye çizilen her doğrunun, belirlediği doğrudan minimum durumunda daha büyük, maksimum durumunda daha küçük olduğunu ispatlanmasından müteşekkildir. Eukleides tarafından da kullanılan³¹ yöntem, maksima ve minima problemlerini geometrik olarak çözmeyle meşgul olan tüm geometriciler tarafından da takip edilmiştir.

³⁰ Maksimum ve minimum kelimelerinin çoğul halleri (Ç. N.)

³¹ 3. Kitap, Önerme 7, 8.

2. Fermat, maksimum ve minimum durumunu işaret eden doğru ilkeyi ilk fark eden kişi gibi görünür. Bu ilke şöyledir: Bir nicelik bu durumlardan herhangi birine yaklaştığında değişimleri gittikçe azalarak sonunda kaybolur. Bu ilkenin bu problemlere uygulanmasında Fermat, diferansiyel hesaba çok yakın bir yöntem kullanır, öyle ki hem Lagrange hem de Laplace³² Fermat'ı diferansiyel hesabın mucidi sayarlar. *De maximis et de minimis* yönteminde Fermat maksimum veya minimum olacak fonksiyonu aynı ifadenin bilinmeyen veya değişken niceliği, küçük bir belirsiz nicelik kadar arttırılmış veya eksiltilmiş haline eşitledi. Ardından her iki tarafta da aynı olan terimleri silerek ve kalan terimlerin her birini belirsiz niceliğe bölerek sorudaki bilinmeyen niceliğin değerinin bulunabileceği bir denklem elde etti. Fermat tarafından verilen aşağıdaki örnek bu yöntemi gösterir.

Bir (a) doğrusunu çarpımları maksimum olacak şekilde iki parçaya bölmek.

x parçalardan biri olsun, bu durumda $a - x$ diğeri olur; çarpımları olan $ax - x^2$ maksimum olacaktır. x değerine belirsiz nicelik (e) ekleyerek aşağıdaki yeni ifadeyi $a(x + e) - (x + e)^2$ ve böylece

$$ax - x^2 = a(x + e) - (x + e)^2$$

elde ederiz. İkinci taraftaki terimleri açıp her iki tarafta da bulunan terimleri silerek ve kalanları e terimi ile bölerek $a - 2x - e = 0$ denklemini elde ederiz.

Şimdi, e niceliğini 0 olarak yok sayarsak, maksimum durumunda $a - 2x = 0$

$$\therefore x = \frac{1}{2}a$$

olur. Bu sonuç, geometriden de (Euk. II. 5) bildiğimiz gibi, doğrunun iki eşit parçaya bölünmesi gerektiğini gösterir.

Diğer bir örnek için $x^3 - bx^2$ ifadesini maksimum yapacak x değerini talep eden örneği alalım. Bu, verilen bir koniden kesilecek en büyük silindiri belirleme probleminde oluşur.

Daha önce olduğu gibi burada e keyfi bir niceliktir. Elimizde

$$x^3 - bx^2 = (x + e)^3 - b(x + e)^2$$

denklemini vardır. Buradan

$$3x^2 - 2bx + 3ex + e^2 - be = 0$$

denklemini elde ederiz. e içeren terimleri yok saydığımızda $3x^2 - 2bx = 0$

$$\therefore x = \frac{2}{3}b$$

olur.

Bu örneklerin her ikisinde de bu yöntemin, fonksiyonun maksimum olacak diferansiyel katsayısını sıfıra eşitleyerek elde edilenle aynı denklemi verdiği görülebilir. Zira, keyfi e niceliğini dâhil etmedeki amaç sadece daha sonra diferansiyel katsayı veya ilk türetilmiş fonksiyon olarak anılacak fonksiyonu elde etmek olduğundan her ikisinde de ilke aynıdır. Diferansiyel hesabın ilkesi Fermat'ın yönteminde bu şekilde açıkça görülmekle birlikte, yine de problemlere genel olarak

³² Leçons sur le Calcul de Fonctions, s. 321. – Exposition du Système du Monde, livre v. chapitre 5.

uygulanmasında orada görülen transandantallerin ve köklerin kaybedilmesi gerekir. Bu da özel hileler gerektirir. İşte bu da, algoritmasının basitliği ve genelliği ile diferansiyel hesabın çare bulmayı amaçladığı şeydir.

3. Maksima ve minima problemleri diferansiyel hesabın ilk uygulandığı problemler arasındadır.

$V = \phi(x)$ maksimum veya minimum olacak fonksiyon olsun ve x yerine $x + h$ yazıldığını farz edelim. Bu durumda V' , V 'nin karşılık gelen değeri olmak üzere

$$V' - V = \frac{d \cdot \phi(x)}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2 \cdot \phi(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 \cdot \phi(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

olur.

Şimdi, diferansiyel katsayılarından hiçbirisi sonsuz olmamak şartıyla, bu dizinin her teriminin kendisinden sonra gelen terimlerin toplamından büyük olmasını sağlayacak kadar küçük bir h değeri seçilebilir. Diğer bir deyişle, serilerin işareti ilk teriminin işaretine bağlıdır. Dolayısıyla, V maksimum veya minimum olduğunda, $V' - V$, ve böylece serinin ilk terimi, $\frac{d \cdot \phi(x)}{dx} \cdot \frac{h}{1}$ sırasıyla negatif veya pozitif olmalıdır.

Bununla birlikte, h çarpanı pozitif veya negatif olabileceğinden, birinci dereceden olan $\frac{d \cdot \phi(x)}{dx} \cdot \frac{h}{1}$ teriminin işareti h 'nin işaretine bağlıdır. Bu sebeple serinin ilk terimi kaybolmadıkça $V' - V$ artışı daima pozitif veya daima negatif olamaz. Dolayısıyla $\frac{d \cdot \phi(x)}{dx} = 0$ elde ederiz.

Bu şart sağlandığında V 'nin artışı, yani $V' - V$

$$\frac{d^2 \cdot \phi(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 \cdot \phi(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

olur. Bu ibare yine V maksimum olduğunda negatif ve V minimum olduğunda pozitif olmalıdır. Fakat $\frac{d^2 \cdot \phi(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2}$ terimi h nin karesini bir çarpan olarak içerdiğinden işareti açık olarak h nin işaretinden bağımsız olacak ve dolayısıyla tamamen $\frac{d^2 \cdot \phi(x)}{dx^2}$ fonksiyonunun işaretine bağlı olacaktır.

Böylece, $V = \phi(x)$ maksimum veya minimum olduğunda $\frac{dV}{dx} = 0$ elde ederiz ve birini diğerinden ayırımı şu şekildedir; $\frac{d^2V}{dx^2}$ ³³ niceliği birinci durumda negatif ve ikinci durumda pozitif olur.

Eğer $\frac{dV}{dx}$ ve $\frac{d^2V}{dx^2}$ nin her ikisi de kaybolursa, aynı akıl yürütme $\frac{d^3V}{dx^3}$ ün de kaybolacağını gösterir ve $\frac{d^4V}{dx^4}$ niceliği V maksimum olduğunda negatif ve V minimum olduğunda pozitif olacaktır. İşlem bu şekilde devam eder.

4. Diferansiyel hesapta sıradan maksima ve minima problemlerinde ve genel olarak tüm uygulamalarında fonksiyonun doğasının bilindiği ve soruşturma süresince

³³ Eserde hatalı olarak $\frac{d^2V}{dx^3}$ yazılmıştır. (Ç. N.)

aynı kaldığı farz edilir. Ulaşılmak istenen hedef herhangi verilen fonksiyonu maksimum veya minimum yapacak özel değerin belirlenmesidir. Bir önceki maddede açıklandığı üzere bu diferansiyel katsayıyı 0'a eşitleyerek gerçekleştirilir. Bu şekilde, çözümü fonksiyonun maksimum veya minimumuna tekabül eden bir değeri verecek olan bir denklem elde edilir. Dolayısıyla $V = \phi(x)$ fonksiyonunun

$$V = \frac{a+x}{x} \sqrt{b^2 + x^2}$$

olduğu farz edilsin.

$$\frac{dV}{dx} = \frac{x^3 - ab^2}{x^2 \sqrt{b^2 + x^2}} = 0$$

olur. Buradan $x = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$ ³⁴ elde ederiz. Karşılık gelen

$$V = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

fonksiyonu minimumu olur. Zira ikinci diferansiyel katsayı

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{b^2(x^3 + 3ax^2 + 2ab^2)}{x^3(\sqrt{b^2 + x^2})^3} \quad ^{35}$$

pozitif bir niceliktir.

5. Böylece, maksimum veya minimum nicelik ile değişken arasındaki ilişki bilindiğinde maksima ve minima problemlerine genel çözüm bulmakta herhangi bir zorluk yoktur. Zira mesele sonlu bir denklemin çözümüne indirgenir. Örnek olarak,

$$V = \psi \left\{ x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \right\} = \psi \{ x, y, p, q, r, \dots \} \quad ^{36}$$

maksimum veya minimum özelliğine sahip bir fonksiyon ve x ile y arasında $y = \phi(x)$ olacak şekilde bir ilişki bulunsun.

Eğer fonksiyonun formu verilirse $y, p, q, \dots$ niceliklerini kolayca x cinsinden ifade edebiliriz. Bunlar V de yerine konulduğunda problem sıradan bir maksima ve minima problemine döner. Fakat, x ve y arasındaki ilişki verilmezse, bu durumda $\phi(x)$ için birbiri ardına farklı formlar farz edildiğinde V nin kendisi de karşılık gelen değişikliklere maruz kalacaktır. Bu sebeple amaç $\phi(x)$ için bir form bulmak olacaktır, öyle ki bu form söz konusu olduğunda V , x değerlerinden bağımsız olarak $\phi(x)$ in diğer herhangi bir formundaki değerinden daha büyük veya daha küçük olacaktır. Dolayısıyla $\phi(x)$ sorudaki bilinmeyen fonksiyon olarak görülebilir. Ayrıca y ve x i bağlayan ilişki verilmemiş olsa da değişkenler birbirinden bağımsız değildir.

$x, y, p, \dots$ nicelikleri $x + h, y + h', p + h'', \dots$ ile değiştirildiğinde V, V'' olsun. Bu durumda $V' = \psi \{ x + h, y + h', p + h'', \dots \}$ olacaktır ve h ve h' , biri rastgele ve

³⁴ Eserde hatalı olarak $x = (ab)^{\frac{1}{3}}$ yazılmıştır. (Ç. N.)

³⁵ Eserde hatalı olarak $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{b^2(x^3 + 3ax^2 + 2ab^2)}{(x^3 \sqrt{b^2 + x^2})^3}$ yazılmıştır. (Ç. N.)

³⁶ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ yerine sırasıyla $p, q, r, \dots$ yazınız.

diğeri ona $y = \phi(x)$ bağıntısı ile bağlı olan x 'in iki fonksiyonu olur. Öyleyse fonksiyonların gelişiminden

$$V' = V + \frac{dV}{dx}h + \frac{dV}{dy}h' + \frac{dV}{dp}h'' + \dots$$

elde ederiz.

Şimdi, problemin doğasından dolayı $\phi(x)$, x in değeri ne olursa olsun her zaman

$$V' > \text{veya} < V$$

olacak şekilde alınmalıdır. Maksima ve Minimada uygulanan akıl yürütmeden

$$\frac{dV}{dx}h + \frac{dV}{dy}h' + \frac{dV}{dp}h'' + \frac{dV}{dq}h''' + \dots = 0$$

denklemini elde ederiz. Eğer bu niceliklerin her birinin görece maksima veya mimimalarını ararken elde edilen

$$\frac{dV}{dx} = 0, \frac{dV}{dy} = 0, \frac{dV}{dp} = 0, \frac{dV}{dq} = 0, \dots$$

denklemleri x değeri ne olursa olsun birbiri ile uyumlu oluyorsa, buradan ortaya çıkan gerekli bağıntı $y = \phi(x)$ olacaktır.

Eğer bu denklemler x ve y arasında farklı bağıntılar verirlerse problem farz edilen genelliğinde imkânsız olacaktır. Fakat bu bağıntıların ancak bazıları birbiri ile uyumlu olursa V fonksiyonu $x, y, p, q \dots$ niceliklerinden biri veya daha fazlası için görece minima veya maksimaya sahip olacaktır.

V fonksiyonu $x, y, p, q \dots$ niceliklerinden ancak birine göre maksimum veya minimum olacaksa, bu durumda sadece bir şartı sağlaması gerekeceğinden problem her zaman mümkün olacaktır.³⁷

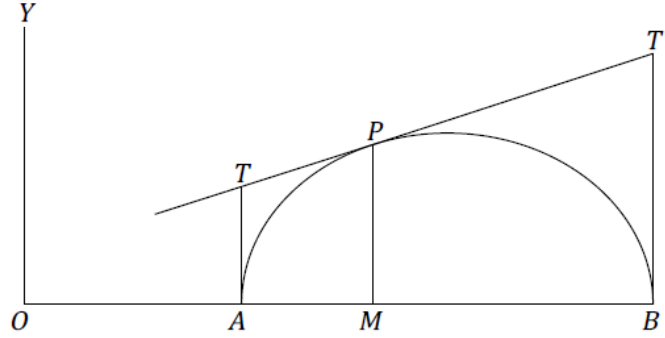
Maksima ve minima ile ilgili bu farklı soru türleri aşağıda gelecek olan problemler ile daha açıkça anlaşılabilir.

PROBLEM I

Herhangi noktasındaki teğet ile apsisin eksenine dik verilen iki doğru kesiştiğinde teğet ve eksen arasında sınırlanan dikdörtgen parçanın alanının maksimum veya minimum olacağı bir eğri bulmak.

APB eğri ve P , eğrinin üzerinde koordinatları x, y olan bir nokta, O orijin olsun. P noktasından, verilen AT ve BT' doğruları ile T ve T' noktalarında kesişecek TT' teğeti çizilsin.

³⁷ Maksimum minimumdan sıradan *kriter* ile ayrılır.



$AO = m$ ve $BO = n$ olsun. Bu durumda

$$\text{Alteget} = y \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$$

diferansiyel ifadesinden $AT = y + p(m - x)$ ve $BT' = y + p(n - x)$ buluruz.

Böylece maksimum veya minimum olacak olan

$$V = (y + p(m - x))(y + p(n - x))$$

olsun.

Şimdi, $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dp}$ diferansiyel katsayılarını alarak sıfıra eşitlenen sonuçların, m, n den farklı olduğu müddetçe birbiriyle uyumlu olmayan denklemler vereceğini kolaylıkla görürüz. Dolayısıyla önerilen problem genel olarak kabul edildiğinde imkânsızdır. Fakat $m = n$ olursa $V = (y + p(n - x))^2$ elde ederiz. Böylece üç denklem

$$\frac{dV}{dx} = 0, \frac{dV}{dy} = 0, \frac{dV}{dp} = 0$$

çıkartırız. Bu denklemlerin tümü $y + (n - x) \frac{dy}{dx} = 0$ yapılarak sağlanır. Bu ifadenin integrali $y = c(n - x)$ bir doğru denklemdir. Bu bağıntı sebebiyle $V = 0$ olur. Ayrıca V fonksiyonu diğer her hipotez için açıkça pozitiftir, dolayısıyla bir minimumdur.

Eğer $V = (y + p(m - x))(y + p(n - x))$ alarak bunun sadece p 'ye göre diferansiyelini hesaplırsak

$$\frac{dV}{dp} = (m - x)(y + p(n - x)) + (n - x)(y + p(m - x)) = 0$$

elde ederiz. Bu da $p = \frac{y(2x-m-n)}{2(m-x)(n-x)}$ verir. Böylece $\frac{2}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n}$ buluruz. İntegralini aldığımızda, c integral alma işleminde ortaya çıkan keyfi bir sabit olmak üzere

$$2 \log_e y = \log_e(x - m) + \log_e(x - n) + \log_e c$$

ve böylece $y^2 = c(x - m)(x - n)$ ³⁸ olur. Şimdi

$$\frac{d^2V}{dp^2} = 2(m - x)(n - x)$$

değerini buluruz ve dolayısıyla her x değeri için bir maksimum olduğu sonucu çıkar. Bu, $(m - x)$ ve $(n - x)$ çarpanlarının farklı işaretlerini açıklar. İşaretleri aynı olduğunda ise bir minimum olur. Bununla birlikte bu durum tamamen c sabitinin işaretine bağlıdır. c nin negatif veya pozitif olmasına göre denklem bir elips³⁹ veya hiperbol denklemi olacaktır. Dolayısıyla eğrinin her bir noktasındaki teğetin konumu sorudaki dikdörtgen elips için maksimum ve hiperbol için negatif bir maksimum veya minimum olacak şekildedir.

PROBLEM II

Herhangi bir noktasındaki altnormali ve apsisinin toplamının karesi minimum olan eğriyi bulmak.

Burada sorudan elimizde $V = (yp + x)^2$ vardır. Böylece

$$\frac{dV}{dx} = 0, \frac{dV}{dy} = 0, \frac{dV}{dp} = 0$$

denklemlerini elde ederiz. Her üçü de $y \frac{dy}{dx} + x = 0$ kılındığında sağlanır. Bu eşitlik problemin farz edilen genel halinde çözümünün mümkün olduğunu gösterir. Buradan integral alarak $y^2 + x^2 = 0$ buluruz. Bu, merkezi orijinde olan bir çember denklemdir ve bu çember problemin ifadesindeki belirli özelliği sağlayan tek eğridir.

6. Bu anlaşıldığına göre, şimdi maksimum ve minimumun artık $V = \psi\{x, y, p, q, \dots\}$ fonksiyonu ile değil onun, (u) ile göstereceğimiz *ilkel* fonksiyonu veya integrali ile ifade edildiği bir problemi ele alalım. Örnek olarak, verilen bir noktadan diğerine en hızlı azalan bir eğri bulunmak istensin. Bu durumda, ilk noktada x yatay ve y dikey olarak ölçülür ve zaman u ile gösterilirse

³⁸ $m = n$ alırsak yine $y = \pm c(x - n)$ elde ederiz.

³⁹ c yi negatif yaparak $y = \sqrt{c(m - x)(x - n)}$, $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{c(m+n-2x)}{2\sqrt{c(m-x)(x-n)}}$

ve

$$y + (m - x) \frac{dy}{dx} = \frac{c(m - x)(m - n)}{2\sqrt{c(m - x)(x - n)}}$$

ayrıca

$$y + (n - x) \frac{dy}{dx} = \frac{c(x - n)(m - n)}{2\sqrt{c(m - x)(x - n)}}$$

buluruz. Böylece

$$(y + p(m - x))(y + p(n - x)) = \frac{1}{4}c(m - n)^2$$

olur. Bu, dikdörtgenin elipste sabit ve yarı-eşlenik ekseninin karesine eşit olduğunu gösterir.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}$$

veya

$$u = \int_x V = \int_x \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{2gy}}$$

elde ederiz. İntegral, verilen noktaların apsisi olan x' ve x'' sınırları arasında alınmalıdır. Fakat bu ifadenin $y = \phi(x)$ verilmediği müddetçe integrallenemeyeceği açıktır. Maksima ve Minima ile ilişkili bu problemlerin geniş bir kümesi geometri ve fizik araştırmalarında gerçekten sıklıkla ortaya çıkarlar. Çözümleri için Diferansiyel Hesapta kurulan yöntemler açıkça yetersizdir. Bu ilişkiyi veya $\phi(x)$ in formunu keşfetmek için analizin daha yüksek bir dalına, Varyasyonlar Hesabına müracaat etmek gerekir.

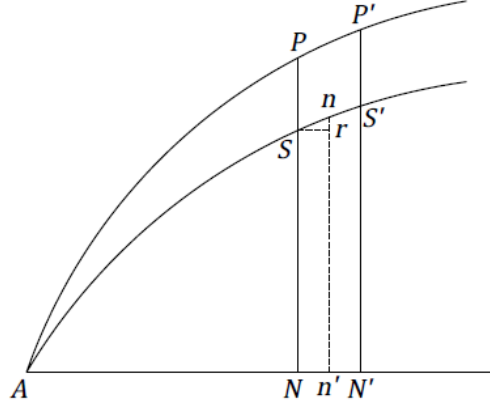
7. Lagrange tarafından verilen yöntem diferansiyel hesaba yakın bir benzerliktedir. Bu yöntem onu hem ilkeler hem de gösterim açısından sistematik ve kâmil bir bilim haline getirmiş ve onu genel farklar hesabının bir alt dalı olarak kurmuştur.

Şimdi x ve y arasında var olabilecek tüm mümkün bağıntılardan burada, V , y 'yi ve onun (x) 'e göre diferansiyel katsayılarını içermek üzere, $\int_x V$ integralini, verilen limitler arasında maksimum veya minimum yapacak $\phi(x)$ formunu bulmak gereklidir. Bunu gerçekleştirmek için (u) 'nin iki durumda değiştiği kavranmalıdır; birincisi, talep edilen eğrinin x, y koordinatlarının değişimiyle; ikincisi, $\phi(x)$ 'in formunun değişimiyle (varyasyon), yani hangisinin verilen şartı sağladığını bulmak için bir eğriden diğerine geçmeyle. Bu iki değişim farklı ve birbirinden tamamen bağımsız olduklarından $\phi(x)$ 'in formunun değişimini diferansiyel hesapta (d) ile ifade edilen, aynı eğrinin koordinatlarındaki değişimden ayırmalıyız. Dolayısıyla bir fonksiyonun formunun değişimini göstermek için genellikle (δ) harfi kullanılır. Örnek olarak $y = \phi(x)$ denkleminde olduğu gibi:

$\phi(x)$, $\psi(x)$ 'e dönüşürse, y 'nin ilkel değeri ve bağıntının değişiminden sonraki değeri arasındaki fark, yani $\psi(x) - \phi(x)$ y 'nin *varyasyonu* olarak adlandırılır ve δy ile gösterilir. Benzer şekilde δx , x 'in varyasyonunu belirtir.

8. Geometrik bir örnek ile bunu anlaşılır bir bakış açısına kolayca yerleştirebiliriz.

$x = AN$, $y = SN$ ve (a) ana parametre olmak üzere ASS' , denklemi $y^2 = ax$ olan parabol olsun. Şimdi, nn' ordinatını SN ye belirsizce yakın alır ve AN' eksenine paralel Sr çizersek, küçük çizgi Sr veya Nn' apsisi diferansiyeli (dx) 'i ve küçük çizgi nr ordinatın diferansiyeli (dy) 'yi temsil edecektir.



dx ve dy arasındaki bağıntı $y^2 = ax$ denkleminin diferansiyelini alarak bulunur. Bu diferansiyel işlemi $2y dy = a dx$ veya $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y} = \frac{a}{2\sqrt{ax}}$ eşitliklerini verir.

Şimdi $y^2 = ax$ denkleminin, elemanlarından biri olan (a) parametresi belirsiz küçük bir nicelik δa kadar arttırıldığında değişeceğini ve parametresi $(a + \delta a)$ olan diğer bir parabol APP' oluşturacağını düşünelim. Bu durumda

9. AN apsisi her iki parabol için aynı alınmalıdır. APP' parabolünün PN ordinatı SN orijinal ordinatının küçük bir miktar SP kadar arttırılmasına eşit olacaktır. Bu artış NS ordinatının (a) parametresinden ortaya çıkan varyasyonunu temsil eder. Şimdi y nin varyasyonunu δy ile göstererek ve $y^2 = ax$ denkleminde a ve y yerine sırasıyla $(y + \delta y)$ ve $(a + \delta a)$ yerleştirerek değişmiş parabol APP' için $(y + \delta y)^2 = x(a + \delta a)$ denklemini elde ederiz.

Bununla ilk denklem arasındaki farkı alarak ve Diferansiyel Hesapta işletilene benzer akıl yürütme ile δy nin ikinci kuvvetini yok sayarak, δy ile δa arasındaki ilişkiyi belirleyen $\delta y = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \delta a$ denklemini buluruz.

10. AN apsisini de küçük bir $NN' = \delta x$ miktarı kadar değiştirdiğimizde APP' parabolünün karşılık gelen ordinatı $N'P'$ olacaktır. Küçük çizgi $P'S'$ orijinal ordinat NS deki değişimi gösterir. $\delta a, \delta x, \delta y$ değişkenlerinin ilişkilerini ifade eden denklemi bulmak için $y^2 = ax$

denkleminde a, x, y 'nin yerine sırasıyla $(a + \delta a), (x + \delta x), (y + \delta y)$ yerleştirmeliyiz. Böylece $(y + \delta y)^2 = (a + \delta a)(x + \delta x)$ olur. Dolayısıyla bu denklem ile orijinal denklem arasındaki farkı alıp $\delta y, \delta a, \delta x$ 'in kuvvetlerini ve çarpımlarını görmezden gelerek

$$\delta y = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \delta a + \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \delta x \right)$$

elde ederiz. Bu, SN ordinatının gerçek (actual) varyasyonunun ifadesidir.⁴⁰

11. Varyasyon değişkenlerin bir fonksiyonu olduğundan türevi alınabilir. Böylece

$$\begin{aligned} d\delta y, d^2\delta y, \dots \dots d^n\delta y, \\ d\delta x, d^2\delta x, \dots \dots d^n\delta x, \\ \vdots \end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer bir çıkarımla ayrıca

$$\begin{aligned} \delta dy, \delta d^2y, \dots \dots \delta d^ny, \\ \delta dx, \delta d^2x, \dots \dots \delta d^nx, \\ \vdots \end{aligned}$$

elde ederiz.

Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \delta \int V, \quad \int \delta V, \\ \delta \int \int V, \quad \int \int \delta V \\ \vdots \end{aligned}$$

sembollerinin anlamlarını da kolayca kavrayabiliriz.

12. Önüne (d) veya (δ) konulan her ifadede bu sembollerin yer değiştirmesi niceliğin değerini değiştirmez, diğer bir deyişle $\delta d^n y = d^n \delta y$ ve $\delta \int^n V = \int^n \delta V$ olur.

Bunlar varyasyonlar hesabının temel ilkeleri olduğundan aşağıdaki kanıtları ekliyoruz. $y = \phi(x)$ olsun. Bu durumda tanımdan

$$\begin{aligned} \delta y &= \psi(x) - \phi(x) \\ \therefore y + \delta y &= \psi(x) = F(y) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \delta y &= F(y) - y \\ \therefore \delta y &= f(y) \end{aligned} \tag{1}$$

$$y' = y + dy \tag{2}$$

koyalım, böylece (1) den $\delta y' = f(y')$ olur. (1) i bu denklemden çıkararak

$$\delta y' - \delta y = f(y') - f(y) = df(y)$$

elde ederiz. Fakat (1) den $df(y) = d\delta y$

$$\therefore \delta y' - \delta y = d\delta y \tag{3}$$

ve (2) den $y' = \delta(y + dy) = \delta y + \delta dy$

$$\therefore \delta y' - \delta y = \delta dy \tag{4}$$

elde edilir. (4) ve (3) ü kıyaslayarak

⁴⁰ x ve y koordinatları her iki parabolün tüm rotası boyunca sürekli olarak değişirken (a) parametresi ve onun varyasyonu δa nın sabit kaldığını belirtmek gerekir. $\delta a, \delta x, \delta y$ varyasyonlarından her biri keyfi olarak alınabilir. Böylece, örnek olarak, $\delta x = dx$ kabul edebiliriz. Fakat bu kabul bir kere yapıldığında diğer varyasyonlar ona bağlıdır ve bundan sonra $\delta y = dy$ veya $\delta y = \delta a$ farz edemeyiz. Dolayısıyla aynı eğri üzerindeki göreceli koordinat değişimleri diferansiyellerle gösterilir. Bunlardan bir eğriden diğerine geçerken meydana gelenler varyasyonlarla tanımlanır.

$$\delta dy = d\delta y \quad (5)$$

buluruz. Diğer bir deyişle “bir niceliğin diferansiyelinin varyasyonu niceliğin varyasyonunun diferansiyeline eşittir.”

$$\begin{aligned} \text{Şimdi (5) denkleminde } y \text{ yerine } (dy) \text{ koyarak } \delta d(dy) &= d\delta(dy) \\ \therefore \delta d^2 y &= d^2 \delta y \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\delta d^n y = d^n \delta y \quad (6)$$

genel sonucuna varırız.

Yine, $V' = \int V$, $\therefore dV' = V$ ve $\delta dV' = \delta V$ veya $d\delta V' = \delta V$ ve $\therefore \delta V' = \int \delta V$ fakat $V' = \int V$ ve $\therefore \delta \int V = \int \delta V$ ve daha önceki ile aynı yöntemle genel olarak $\delta \int^n V = \int^n \delta V$ ⁴¹

Dolayısıyla herhangi bir formülde (d) , (δ) ve (δ) , $(\int)$ sembollerinin yer değiştirmesi değerini etkilemez.

13. Bu temel önermenin doğruluğunu tesis ettikten sonra, bu hesaba ait problemlerin çözümünde ortaya çıkan bu gibi fonksiyonların varyasyonu için formülleri çıkarmayla devam edeceğiz.

$p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2 y}{dx^2}$, ... olmak üzere $p, q, r, \dots$ nin varyasyonunu bulmak isteniyor.

Elimizde $\delta y = y' - y$, $\therefore y' = y + \delta y$ ve ayrıca $x' = x + \delta x$ bulunuyor.

$$\therefore \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx}$$

ve

$$\frac{dx'}{dx} = 1 + \frac{d\delta x}{dx}$$

olur.

Şimdi, p nin orijinal değeri ile değişmiş değeri arasındaki farkı alarak $\delta p = \frac{dy'}{dx'} - \frac{dy}{dx}$ elde ederiz.

Fakat

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx}}{1 + \frac{d\delta x}{dx}} = \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx} \right) \left(1 + \frac{d\delta x}{dx} \right)^{-1} = \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx} \right) \left(1 - \frac{d\delta x}{dx} + \dots \right)$$

Kendimizi δx ve δy nin birinci kuvvetlerine bağlı terimlerle sınırlandırarak

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{d\delta x}{dx}$$

⁴¹ (6) denkleminde n yi negatif farz ederek tek seferde

$$\delta \int^n V = \int^n \delta V$$

eşitliğini ispatlayabiliriz. Bkz. *Cambridge Mathematical Journal*, Part I. p. 12.

$$\therefore \delta p = \frac{d\delta y}{dx} - p \frac{d\delta x}{dx} \quad 42 \quad (1)$$

Benzer şekilde

$$\delta q = \frac{dp'}{dx'} - \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp'}{dx}}{\frac{dx'}{dx}} - \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dx} + \frac{d\delta p}{dx}}{1 + d \frac{\delta x}{dx}} - \frac{dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} - q \frac{d\delta x}{dx} \quad 43 \quad (2)$$

ve

$$\delta r = \frac{d\delta q}{dx} - r \frac{d\delta x}{dx} \quad (3)$$

$$\vdots$$

elde edilir.

14. İki değişkenli bir fonksiyonun ve değişkenlerden birinin diferansiyel katsayılarının varyasyonunu her iki değişkenin varyasyonları ve aynı diferansiyel katsayıları cinsinden bulunmak isteniyor.

Fonksiyon $V = \psi(x, y, p, q, \dots)$ olsun. Böylece

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \dots$$

ve bu durumda

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \dots \quad 44 \quad (1)$$

veya

$$\delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dp} \delta p + \frac{dV}{dq} \delta q + \dots$$

olur.

(1) ve Mad. 11. den

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} - p \frac{d\delta x}{dx}$$

⁴² Eğer $\frac{dy}{dx}$ niceliğini $\frac{v}{z}$ ile gösterir ve onun bir kesir olarak diferansiyelini alıp d yerine δ koyarsak, tek seferde, daha önceki gibi

$$\delta p = \frac{z\delta v - v\delta z}{z^2} = \frac{\delta v}{z} - p \frac{\delta z}{z} = \frac{\delta dy}{dx} - p \frac{\delta dx}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} - p \frac{d\delta x}{dx}$$

elde ederiz.

⁴³ Eserde hatalı olarak üçüncü eşitlikten sonra $\frac{\frac{dp}{dx} + \frac{d\delta p}{dx}}{1 + d \frac{\delta x}{dx}} - \frac{dp}{dx}$ yazılmıştır. (Ç. N.)

⁴⁴ Denklemden $\delta p, \delta q, \dots$ değerlerini yerleştirdiğimizde

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + \frac{1}{dx} (Pd\delta y + Qd\delta p + \dots) - \frac{d\delta x}{dx} (Pp + Qq + \dots)$$

(2)

Eğer sadece y nin varyasyon kabul edeceğine farz edersek, (2) denklemi

$$\delta V = N\delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{d\delta p}{dx} + R \frac{d\delta q}{dx} + \dots$$

olur. Fakat $\frac{d\delta p}{dx} = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{\delta d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \delta y}{dx^2}$ ve $\frac{d\delta q}{dx} = \frac{\delta dq}{dx} = \frac{d^3 \delta y}{dx^3}$ olduğundan

$$\therefore \delta V = N\delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + R \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + R \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \dots$$

elde ederiz.

$$\frac{d}{dx}(p\delta x) = \frac{dp}{dx}\delta x + p\frac{d\delta x}{dx} = q\delta x + p\frac{d\delta x}{dx}$$

olduğundan

$$\therefore \delta p = \frac{d}{dx}(\delta y - p\delta x) + q\delta x$$

Benzer şekilde

$$\delta q = \frac{d}{dx}(\delta p - q\delta x) + r\delta x = \frac{d^2}{dx^2}(\delta y - p\delta x) + r\delta x$$

ve

$$\delta r = \frac{d^3}{dx^3}(\delta y - p\delta x) + s\delta x$$

⋮

Kısaltma amacıyla $\delta y - p\delta x = \omega$ veya $\delta y = p\delta x + \omega$ olsun. Bu durumda bu değerleri (1) de yerine koyarak

$$\delta V = \delta x(M + Np + Pq + Qr + \dots) + N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + \dots$$

$$\therefore \delta V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + \dots$$

elde ederiz.

SONUÇ: $\omega = \delta y - p\delta x$ olduğundan V nin varyasyonu iki kısma ayrılabilir; bir kısım tamamen y nin varyasyonuna, diğer kısım x in varyasyonuna bağlıdır.

15. Üç değişkenli bir fonksiyon ve bu değişkenlerden ikisinin üçüncünün bir fonksiyonu kabul edilerek elde edilen diferansiyel katsayılarının varyasyonu bulunmak isteniyor.

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \dots \\ + N'dz + P'dp' + Q'dq' \dots$$

olsun. Daha önce olduğu gibi ilerlendiğinde ve kısaltma amacıyla $\omega' = \delta z - p'\delta x$ değişken değişikliği uygulandığında

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + \dots \\ + N'\omega' + \frac{P'd\omega'}{dx} + Q'\frac{d^2\omega'}{dx^2} + \dots$$

sonucu elde edilir.

Bu formül kolaylıkla herhangi sayıda bir değişkeni olan bir fonksiyon ve bu değişkenlerin içlerinden birinin fonksiyonları farz edilerek elde edilen diferansiyel katsayılar durumuna genişletilebilir.

16. Değişkenlerinden birinin diğer ikisinin bir fonksiyonu olduğu üç değişkenli bir fonksiyonun varyasyonu bulunmak isteniyor. Önerilen fonksiyon, değişkenleri ve onların diferansiyel katsayılarını içeriyor.

Fonksiyon $V = \psi(x, y, z, p, q, r, s, t, \dots)$ ve $z = \phi(x, y)$, $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, $r = \frac{d^2z}{dx^2}$, $s = \frac{d^2z}{dx dy}$, $t = \frac{d^2z}{dy^2}$, ... olsun.

Bu durumda

$$\delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dz} \delta z + \frac{dV}{dp} \delta p + \dots$$

elde ederiz. Fakat

$$\delta p = \delta \frac{dz}{dx} = \frac{d\delta z}{dx} - p \frac{d\delta x}{dx} = \frac{d}{dx} (\delta dz - p\delta x) + \frac{dp}{dx} \delta x$$

olur.

$\frac{d}{dx} (q\delta y) = \frac{dq}{dx} \delta y$ olduğundan, δy yi sabit sayarak

$$\therefore \delta p = \frac{d}{dx} (\delta z - p\delta x - q\delta y) + \frac{dp}{dx} \delta x + \frac{dq}{dx} \delta y$$

$\omega = \delta z - p\delta x - q\delta y$ değişikliği yapıldığında

$$\delta p = \frac{dq}{dx} + \frac{dp}{dx} \delta x + \frac{dq}{dx} \delta y = \frac{dq}{dx} + \frac{dp}{dx} \delta x + \frac{dp}{dy} \delta y$$

olur.

Benzer şekilde

$$\delta q = \frac{dw}{dx} + \frac{dq}{dx} \delta x + \frac{dq}{dy} \delta y$$

ve

$$\delta r = \delta \frac{dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{d\delta x}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{dr}{dx} \delta x + \frac{dr}{dy} \delta y.$$

$$\delta s = \frac{d^2\omega}{dx dy} + \frac{ds}{dx} \delta x + \frac{ds}{dy} \delta y$$

$$\delta t = \frac{d^2\omega}{dy^2} + \frac{dt}{dx} \delta x + \frac{dt}{dy} \delta y \quad ^{45}$$

⋮

Ayrıca

$$\delta z = \omega + \frac{dz}{dx} \delta x + \frac{dz}{dy} \delta y$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \therefore \delta V &= \delta x \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{dV}{dp} \frac{dp}{dx} + \frac{dV}{dq} \frac{dq}{dx} + \dots \right) \\ &+ \delta y \left(\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz} \frac{dz}{dy} + \frac{dV}{dp} \frac{dp}{dy} + \frac{dV}{dq} \frac{dq}{dy} + \dots \right) \end{aligned}$$

⁴⁵ Eserde hatalı olarak $dt = \frac{d^2\omega}{dy^2} + \frac{dt}{dx} \delta x + \frac{dt}{dy} \delta y$ yazılmıştır. (Ç. N.)

$$\begin{aligned}
& + \frac{dV}{dz} \omega + \frac{dV}{dp} \frac{d\omega}{dx} + \frac{dV}{dq} \frac{d\omega}{dy} \\
& + \frac{dV}{dr} \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{dV}{ds} \frac{d^2\omega}{dx dy} + \frac{dV}{dt} \frac{d^2\omega}{dy^2} \\
& + \dots \\
\therefore \delta V &= \left(\frac{dV}{dx} \right) \delta x + \left(\frac{dV}{dy} \right) \delta y + \frac{dV}{dz} \omega \\
& + \frac{dV}{dp} \frac{d\omega}{dx} + \frac{dV}{dq} \frac{d\omega}{dy} \\
& + \frac{dV}{dr} \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{dV}{ds} \frac{d^2\omega}{dx dy} + \frac{dV}{dt} \frac{d^2\omega}{dy^2} \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Bu formülün istenilen sayıda değişkene sahip bir fonksiyona genişletilebileceği açıktır.

Örnek: Bir eğrinin alttanjantının⁴⁶ varyasyonu bulunmak isteniyor.

x, y eğri üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları, s alttanjant olsun. Bu durumda $s = y \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$

$$\therefore \delta s = \frac{\delta}{p} - \frac{y \delta p}{p^2}$$

olur. Fakat $\delta p = \frac{d\delta y}{dx} - p \frac{d\delta x}{dx}$

$$\therefore \delta s = \frac{\delta y}{p} - \frac{y d\delta y}{p^2 dx} + \frac{y d\delta x}{p dx}$$

p yerine $\frac{dy}{dx}$ koyarak

$$\delta s = \frac{dx}{dy} \delta y - \frac{y dx}{dy^2} d\delta y + \frac{y}{dy} \delta x$$

elde ederiz.

17. İşlem ve sonuçlardan kolayca görüleceği üzere bu hesabın algoritması tamamen diferansiyel hesabınki ile aynı olmalıdır. Dolayısıyla cebirsel veya transandantal, herhangi bir fonksiyonun varyasyonunu bulmakta hiçbir zorluk

⁴⁶ İng. subtangent (Ç. N.)

olmayacaktır. Zira sadece fonksiyonun diferansiyelinde (d) yerine (δ) yerleştirmeliyiz. Böylece birinden diğerine kolayca geçebiliriz. Fakat fonksiyon $\int_x V$ 'de olduğu gibi integral işaretleri altında sunulursa diferansiyel hesabın kuralları artık geçerli değildir. Zira bunun diferansiyelini almak istediğimizde sadece integral işaretini kaldırmalıyız ve sonuç yalnızca V olacaktır. $\delta \int_x V$ ile gösterilen, $\int_x V$ 'nin varyasyonu ise çok farklıdır. Varyasyonlar Hesabının ana amacı V fonksiyonu y ve onun diferansiyel katsayılarını içermek üzere

$$\delta \int_x V, \quad \delta \int_y \int_x V, \dots$$

gibi fonksiyonların varyasyonlarına ulaşmaktır.

Fakat bu, dinamik izoperimetrik problemlere uygulamaları ile Analizin geniş bir dalı olduğundan sınırlarımız tüm ayrıntıları ile burada ilgilenmemize müsaade etmiyor. Konu hakkında en iyi bilgi, en mükemmel ve güncel çalışmalar için okuyucuyu “Mémoires de l'Académie Royale des Science, tome XII.” içerisinde bulunan M. Poisson'un makalesine ve “Journal de Mathématiques, tome III. p. 44.” deki M. Jacobi'nin makalesine yönlendiriyoruz.

KAYNAKLAR

- Ameen Bey, M. Z.; *An Introduction to the Calculus of Variations: with a theoretical view of maxima and minima*, Cambridge: Metcalfe and Palmer, 1839.
- Cambridge Chronicle and Journal and Huntingdonshire Gazette*, 12 Aralık 1840.
- Devlet Arşivleri Başkanlığı Osmanlı Arşivi (OA), *Cevdet Askeriye (C. AS)* 191/8251.
- _____, *İrâde Dâhiliye (İ. DH)* 161/8361.
- _____, *İrâde Hâriciye (İ. HR.)* 5/249.
- _____, *Hatt-ı Hümayûn (HAT)* 309/18272, 1179/46582, 1643/5, 1643/16.
- _____, *Mâbeyn-i Hümayûn (MB. İ)* 1/17.
- _____, *Sadaret Âmedi Kalemi Defterleri (A. AMD)*, 2/40.
- _____, *Sadaret Mektubî Kalemi (A. MKT)* 100/28, 208/33.
- _____, *Sadaret Mektubî Kalemi Mühimme Evrakı (A. MKT. MHM)* 2/65.
- Dönmez, Ahmet; “Osmanlı-İngiliz İlişkileri: Diplomasi ve Reform (1833-1841)”, doktora tezi, Selçuk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 2013.
- Emin Pacha; *Mémoire sur un Nouveau Système de Confection des Fusées de Guerre*, Paris: Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1840.
- Goldstine, Herman H.; *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, New York: Springer, 1980.
- Jacobi, Carl; “Sur le Calcul des Variations et sur la Théorie des Équations Différentielles”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées Ire série* Tome 3, 1838, s. 44-59.
- Mehmed Esad; *Mir'at-ı Mekteb-i Harbiye*, İstanbul: Artin Asaduryan Şirket-i Mürettibiye Matbaası, 1310.
- _____; *Mir'ât-ı Mühendishâne-i Berri-i Hümayûn*. İstanbul: Karabet Matbaası, 1312.
- Poisson, Siméon, “Mémoire sur le Calcul des Variations”, *Mémoires de l'Académie des Sciences* Tome XII, 1833, s. 22-331.
- Polat, Atilla; “Mekteb-i Harbiye Nazırlarından Matematikçi Mehmed Emin Paşa'nın Biyografisine Giriş”, *Osmanlı Bilimi Araştırmaları*, S. 20, c. 2, 2019, s. 59-74.

Salih Zeki; *Kamus-ı Riyaziyyat*, İstanbul Üniversitesi Nadir Eserler Kütüphanesi, T910.
University of Cambridge Library, “ACAD-A Cambridge Alumni Database”,
<https://venn.lib.cam.ac.uk/cgi-bin/search-2018.pl?sur=&suro=w&fir=&firo=c&cit=&cito=c&c=all&z=XTUR&tex=&sye=&eye=&col=all&maxcount=50> (erişim: 9 Mart 2023).
University of Cambridge Library, “Glossary of Cambridge-related Terminology”,
<https://www.lib.cam.ac.uk/university-archives/glossary/fellow-commoner> (erişim: 12 Mart 2023).

